論文の内容の要旨

氏名：柴　崎　雄　介
博士の専攻分野の名称：博士（理学）
論文題名： Non-equilibrium statistical physics of stochastic and chaotic Loewner evolutions (確率論的・カオス的レヴナー発展の非平衡統計物理学)

本研究は、複素解析の分野で研究されている曲線の発展を表す数学モデルであるレヴナー発展の統計力学的性質を調べるとともに、その具体的な物理・生物系への応用法を示すものである。本研究で扱うレヴナー発展の基礎となる方程式は 1920 年代に提案された等角写像系に関する微分方程式であるが、物理システムとの関わり合いは、2000 年に発見された確率論的レヴナー発展(Stochastic Loewner evolution: SLE) によって明らかになった。SLE は、レヴナー方程式における駆動関数を拡散係数 κ によって係数づけられた標準ブラウン運動(Wiener 過程)として選ぶことによって構成され、複素平面上に再現されるランダム曲線は単一のパラメータ κ によりその幾何学的性質は制御されることが知られている。レヴナー発展及び SLE の種々の２次元の統計力学モデルに対する応用はこれまで数理物理学の領域においてに盛んに研究されてきたものの、非平衡系を含む幅広い物理現象に対する理論の拡張及び応用については、これまで十分に研究がなされていなかった。一般的に、SLE は確率論の枠組みで議論されることが多いものの、レヴナー発展の理論は、等角写像系に基づくパターン形成の問題と深い関りを持つことが知られているため、非平衡統計力学の見地からこのモデルを捉えなおすことは、統計物理学から生物物理学までの幅広い物理学の領域の問題に対して何らかの寄与をすることが見込まれる。

本論文で扱う方程式は、複素上半平面 $\mathbb{H}$ 上の曲線 $\gamma[0,t]$ の発展を表す以下の Chordal レヴナー発展である。

$$\frac{\partial g_t(z)}{\partial t} = \frac{2}{g_t(z) - \xi_t}, \quad g_0(z) = z \in \mathbb{H}.$$

ここで、g_t は $\mathbb{H} \setminus \gamma[0,t]$ から$\mathbb{H}$への写像であり、ξ_t は一次元の実数のパラメータ t の関数で、駆動関数と呼ばれる。上記の式で表されるレヴナー発展を扱い、本論文において示したことは、以下の通りである。

１．レヴナー発展とカオス力学系の深い関りを示し、カオス力学系による SLE の拡張を示したこと。
２．物理系・生物系における 2 次元の形態学データに対するレヴナー発展の応用法を示し、その結果の物理学的意味について考察したこと。
３．レヴナー発展における数学的パラメータであるレヴナー時間について、通常の意味での物理学的時間との関係性について考察し、非平衡系の新たな体系化に対する今後の研究の展望を示したこと。

本論文の内容は次の通りである。

第１章 導入―レヴナー発展と力学系

レヴナー発展の理論の概要について導入し、確率論的レヴナー発展（SLE）の基本的性質についても述べる。ここではレヴナー発展における演算規則やその離散型表現の導入、また SLE が物理学でよく使われるランジュバン方程式、フォッカー・プランク方程式の形式と整合性があるという先行研究に触れ、フラクタル次元の導出方法についての先行研究についても紹介する。そのうえで、SLE に対する拡張としてカオス写像から構成される拡散過程を駆動関数としてもつレヴナー発展を提案し、通常の SLE には見られない凝集構造やマルチフラクタル性について議論し、非平衡系における自己組織化現象との類似性についても議論する。

第２章　２次元形態解析

レヴナー発展の理論の２次元の形態学的データに対する応用を物理系、生物系を扱いながら示し、その物理学的意味について考察する。具体的には、２次元イジング模型における境界面、及び培養神経細胞における神経突起の形態について、解析を行った結果を示しそれを物理学的に解釈する。本論で示す具体的な解析の手順は次の通りである。1) 形態学的データを抽出し複素平面上の曲線へとそれを変換する。2) 離散型レヴナー発展に基づく数値計算のアルゴリズムを用い、離散的曲線データに対するレヴナー駆動関数を求める。3)得られた駆動関数に対して、時系列解析を適用しその性質を調べる。

イジング模型の境界面に関しては、数学的には臨界温度における幾何学に関してそれが通常の SLE で記述されることが既に示されているが、本研究では数値計算によるアプローチによって臨界温度以外の境界面についてもレヴナー発展の枠組みにおいてそれがどのように記述されるか考察している。上記のアプローチによってまず明らかになったことは、イジング境界面に対応する駆動関数の差分(レヴナー駆動力)の時系列がシステムの温度によって分岐し、正のリャプノフ指数をもつアトラクターが存在するカオス力学系的性質をもつことである。またその時系列の推定された確率密度関数がガウシアン型であることから、レヴナー駆動力がガウシアン・カオスの例であることが明らかになった。また、レヴナー駆動力に対する情報エントロピーを、組み合わせエントロピーを用いて推定し、システムのエネルギーと比較したところ、境界面の複雑性とエネルギーにおける、温度に必ずしも依存しない指数関数的な関係が見られたことから、イジング模型における幾何学的複雑性がエネルギーを決定する重要な要素であることが示唆された。

次に、本論では神経形態学に関しての結果についても述べる。健常者由来及びアルツハイマー型認知症(AD)由来の iPS 細胞をディッシュ上に培養し、発達初期段階(２週間以内)における細胞の画像データを取得し、その突起形態を２次元の形態学的データとして取得し、レヴナー発展の枠組みにおいて解析を行った。上記アルゴリズムによって、レヴナー駆動力を数値計算により時系列データとして取得し、トレンド除去揺らぎ解析(Detrended Fluctuation Analysis)によってその自己相関性を解析した。その結果、培養開始 3 日後から 10 日後にかけて、健常者—AD 間でのレヴナー駆動力における自己相関性に有意な差が見られた。この結果は、生物学における形態の複雑度を測る手段としてのレヴナー発展の有用性を示すとともに、その複雑性と神経疾患の関連性を示唆している。

第 3 章 レヴナー時間

先行研究において、レヴナー発展及び SLE は曲線の幾何学的な性質を調べるために用いられることが多いが、非平衡統計力学との関連性を考えるうえで、曲線の動的性質を調べることも重要な課題である。第２章で述べた形態学的解析において駆動関数の時間パラメータは、しばしばレヴナー時間と呼ばれ、解析のうえでは通常の時間と異なる物理学的次元をもつと考えられる。そのため、今後の研究の発展のためには、レヴナー時間と物理学的時間の適切な関係を調べる必要がある。第 3 章ではこの非平衡物理学に対する新たな視座として、レヴナー時間と物理学的時間の関係性と変換法及び、曲線—駆動関数における非平衡—平衡状態対応を、一次元の非平衡ダイナミクスを扱いながら示す。具体的には、非マルコフ過程として乗算的ノイズ及び時間依存的ドリフト項を持つランジュバン系を構成し、第 1 章で述べたレヴナー発展のランジュバン型表現を用いて解析を行った。中心となるアイデアは、ランジュバン型のレヴナー発展における y 軸 (複素平面における虚数軸)を物理学的時間 t に置き換えることであり、これに基づく時間変換により非線形なダイナミクスが線形なランジュバンダイナミクスに変わることを示した。またこの結果の一般化可能性についても議論する。

第 4 章 結論

本研究の総括として結論を述べる。レヴナー発展および SLE における先行研究では、その物理学への応用は数理物理学の領域で主に行われ、適用可能な統計力学モデルは共形・スケール不変則を満たす例に焦点が当たることが多かった。本論文で示した数値計算による物理・生物系のデータに対する応用を通して、レヴナー発展の理論の適用可能性は拡張され、その理論の背後にカオス力学系的性質が存在することが示唆された。また、パターン形成や非平衡物理学の一般理論の問題に対するアプローチとしてのレヴナー発展の有用性が認められ、今後の研究においてその体系化が望まれる。またレヴナー発展の独自の発展規則に基づく力学系理論としての役割は、現代的なシステム理論とともに議論することが可能であり、領域横断的な研究のための理論的枠組みとしても機能する。