

減衰調和振動子の正準量子化

令和2年1月

日本大学大学院理工学研究科博士後期課程

量子理工学専攻

藤原 侑樹

目次

第1章 序論	3
第2章 Bateman 模型に対する2つの量子化法	5
2.1 導入	5
2.2 Bateman 模型とその正準量子化	7
2.2.1 正準形式	7
2.2.2 正準量子化	9
2.3 Feshbach-Tikochinsky の量子化法の再定式化	11
2.4 虚数スケール量子化法	17
2.5 まとめと今後の課題	22
2.6 補遺	24
2.6.1 固有関数の考察	24
第3章 修正された Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の正準量子化	27
3.1 導入	27
3.2 修正された Bateman 模型	29
3.3 正準形式	32
3.4 正準量子化	44
3.5 Schrödinger 描像	48
3.6 Schrödinger 方程式とその解	53
3.6.1 初期時刻における状態が基底状態である場合	56
3.6.2 初期時刻における状態が励起状態である場合	60
3.6.3 遷移確率の最大値についての考察	72
3.7 まとめと今後の課題	73
3.8 補遺	74
3.8.1 エネルギー演算子の固有関数 (3.5.15) の導出	74
3.8.2 式 (3.6.4) の導出	76

3.8.3	式 (3.6.7) の導出	78
3.8.4	偏微分方程式 (3.6.9) の導出	80
3.8.5	偏微分方程式 (3.6.9) の特殊解の導出 (変数分離による解法)	82
3.8.6	偏微分方程式 (3.6.9) の一般解の導出	84
3.8.7	$\sum_n^\infty c_n(t) ^2 = 1$ が成り立つことの確認	103
3.8.8	$\gamma \rightarrow 0$ の場合の遷移確率の時間変化	108
3.8.9	断熱近似をした場合の波動関数の導出	110
第 4 章 結論		111
参考文献		115

第1章 序論

調和振動子は物理学において基本的な模型であり、その量子論は完全に理解されている。実際に量子力学における重要な問題が調和振動子に帰着し、解かれている。一方で、減衰調和振動子は、調和振動子に対して速度に比例する減衰の効果を加味した模型であり、散逸系の最も簡単な例の1つである。減衰調和振動子の量子化の研究は、多くの人々によってなされてきたが、減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いは未だに明確にされていない。本研究の目的は、減衰調和振動子の量子論を正しく理解することである。

減衰調和振動子の量子化の方法として、大きく分けて2つの方法が知られている。一つ目の方法は、環境と相互作用する調和振動子を考え、環境を平均化することにより、量子化を行う方法である。二つ目の方法は、減衰調和振動子の運動方程式を与えるラグランジアンを設定して、それを基に量子化を行う方法である。この方法は環境の自由度を直接扱わなくて済むという長所があり、現象論的な方法と捉えることができる。本研究では、上述の二つ目の方法を採用して、減衰調和振動子の量子化を行う。

減衰調和振動子の運動方程式を与える代表的なラグランジアンとして、Caldirola-Kanai ラグランジアン [1,2] と Bateman ラグランジアン [3] の2つが知られている。Caldirola-Kanai ラグランジアンは、あらわに時間に依存するラグランジアンであり、時間を指数とする指数関数と通常の調和振動子のラグランジアンの積である。このラグランジアンに基づく量子化は、不確定性関係の破れを導くなどの幾つかの問題点が指摘されている [4,5]。一方、Bateman ラグランジアンは、あらわに時間に依存しないという望ましい性質を持つが、減衰調和振動子だけではなく、独立な増幅調和振動子も記述するという問題を持つ。Bateman ラグランジアンに基づく減衰調和振動子の量子化は、1977年に Feshbach と Tikochinsky によって、 $SU(1,1)$ Lie 代数を利用して行われた [6]。しかし、得られるエネルギー固有値に下限がなく、力学的な視点から考えると系は不安定なものとなる。これに対して本論文では、虚数スケール量子化法と呼ばれる手法を減衰調和振動子の量子化に適用し、系の不

安定性の問題を解決する [7]. 一方, 上述のように Bateman ラグランジアンは, 独立な増幅調和振動子も記述するという問題を持つ. これに対しては, 減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman ラグランジアンを提案し問題を解決する [8]. その後, このラグランジアンに基づき, 減衰調和振動子の量子化を実行し, 減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いを明らかにする.

本論文の構成は以下の通りである. 第2章では, Bateman 模型に対する2つの量子化法を論じる. 初めに Feshbach と Tikochinsky が導いた結果をより簡潔に導く方法を論じる. さらに, 別の量子化法として虚数スケーリング量子化法を論じる. その際に, 得られるエネルギー固有値に下限が生じることを示す. 第3章では, 減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman 模型を提案して, この模型に基づき, 減衰調和振動子の量子化を行う. これにより, 減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いを明らかにする. 第4章では, 本論文で得られた結果をまとめ, 今後の課題について述べる.

第2章 Bateman 模型に対する 2つの量子化法

この章では, Bateman 模型に対する 2つの量子化法を考える. 1つは $SU(1, 1)$ Lie 代数を用いることなく, Feshbach-Tikochinsky の量子化法で導かれる結果を簡潔に再現する方法である. そしてもう 1つはもともと, Pais-Uhlenbeck 模型に対して提案された, 虚数スケール量子化法である. 後者の量子化法は, 前者の量子化法で生じる下限の無いエネルギースペクトルの問題を解決する. どちらの量子化法においても, ハミルトニアン演算子の固有状態の 2 乗ノルムの正定値性は保障される. Feshbach-Tikochinsky の量子化法とは異なり, 虚数スケール量子化法では, 崩壊状態と成長状態に加えて, 安定状態が現われることが示される.

2.1 導入

Bateman 模型 [3] は, Bateman が約 90 年前に模型を提案して以来, 減衰調和振動子に対する模型として繰り返し研究されている [6, 9–19]. Bateman 模型を定義する Bateman ラグランジアンは, 実際には互いに独立な減衰調和振動子と増幅調和振動子から構成される倍化された系を記述する. それにも関わらず, Bateman 模型は減衰調和振動子に対する基本的な模型として広く認識されている. なぜなら, Bateman ラグランジアンは減衰調和振動子の運動方程式を正しく与え, さらにラグランジアンそのものがあらわに時間に依存しないという望ましい性質を持っているからである.

Bateman 模型の正準量子化は, $SU(1, 1)$ Lie 代数の表現論を用いて, Feshbach と Tikochinsky によって初めて行われた [6]. 彼らは, Bateman 模型のハミルトニアン演算子の固有値とそれらに対応する固有状態を導いた. 得られる固有値は必ず複素数となり, 従って Schrödinger 描像において, 対応する固有状態は崩壊状態または成長状態であることがわかる. さらに, 系のエネルギー固有値として解釈されるハミルトニアン演算子の固有値の実部には, 下限がないことがわかる. このことは,

純粋に力学的な視点から考えると、系の不安定性の問題に繋がる。(Bateman 模型の量子化に熱場の理論 (Thermo Field Dynamics (TFD)) [20,21] の枠組みを適用すると、この問題を回避できる可能性がある [12,13].) Feshbach と Tikochinsky が Bateman 模型の量子化を行った後に、彼らの結果は、幾つかの異なる文脈において再考察されてきた [12–17,19]. しかしながら、下限のないエネルギースペクトルの問題は、明確に取り上げられておらず、今なお解決されていないように思われる.¹

同様の問題は、Pais-Uhlenbeck 模型の正準量子化においても生じる [25]. この模型のラグランジアンは、座標変数の時間に関する 2 階微分を含み、非縮退型であるため、対応する古典的なハミルトニアンは Ostrogradsky の定理 [26,27] に従い、下限がないことがわかる. この望ましくない状況は、Pais-Uhlenbeck 模型の素朴な正準量子化に引き継がれて、下限のないエネルギースペクトルの問題を引き起こす. 対応する固有状態の 2 乗ノルムの正定値性を保ちつつ、この問題を解決するために、Bender と Mannheim は位置演算子と運動量演算子の虚数スケールリングを含む新たな量子化法を提案した [28]. 後に、Mostafazadeh はこの量子化法の数学的な側面を探り、それを虚数スケールリング量子化と呼んだ [29]. この手法は、対応する固有ベクトルの 2 乗ノルムの正定値性を保ちつつ、正定値のエネルギースペクトルを与える.

本研究では、実部に下限があるハミルトニアン演算子の固有値を得るために、Bateman 模型に対して虚数スケールリング量子化法を適用する. その際に、対応する固有ベクトルの 2 乗ノルムの正定値性を明確に考慮する. Bateman 模型に対する虚数スケールリング量子化法を論じる前に、まず初めに、擬 Bogoliubov 変換を用いることにより、Feshbach-Tikochinsky の量子化法で導かれた結果を簡潔に再現することを試みる. 本研究の手法は、 $SU(1,1)$ Lie 代数を用いていないため、Feshbach-Tikochinsky の量子化法 [6,11,12,16] よりも単純であることがわかる. Feshbach-Tikochinsky の量子化法の再定式化の後に、実際に Bateman 模型に対して虚数スケールリング変換とユニタリー変換の組み合わせを用いることで、虚数スケールリング量子化法を展開する. 上述の 2 つの量子化法は、消滅演算子と生成演算子の異なる変換に基づき、同等の立場で理解される.

この章は以下のように構成される. 第 2.2 節では、2 つの量子化法に対する準備を含めて、Bateman 模型を簡単に説明する. 第 2.3 節では、Feshbach-Tikochinsky

¹ 最近、Bateman 模型の量子化は、非可換空間に関連して研究されている [22]. Bateman 模型の量子化に関する他の最近の研究として、例えば文献 [23,24] を参照せよ. これらの研究の内容は、この論文で扱う内容とは直接的には関係していない.

の量子化法で導かれた結果を簡潔に再現する。第 2.4 節では, Bateman 模型に対する虚数スケーリング量子化法を論じる。第 2.5 節では, 本章のまとめを行い, 今後の課題を述べる。第 2.6 節では, 補足として, 2 つの量子化法における固有関数について論じる。

2.2 Bateman 模型とその正準量子化

この節では, Bateman 模型とその量子力学的な構成を簡単に説明する。

2.2.1 正準形式

Bateman 模型は, Bateman ラグランジアン

$$L_B = m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy \quad (2.2.1)$$

で定義される模型である [3]。ここで, $x = x(t)$ と $y = y(t)$ は実座標変数であり, 時刻 t の関数となっている。また, m, γ, k は正の実定数である。力学変数の上のドットは, 時刻 t に関する微分を表している。このラグランジアンから, y に関する Euler-Lagrange 方程式は

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0 \quad (2.2.2)$$

のように得られ, x に関する Euler-Lagrange 方程式は

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0 \quad (2.2.3)$$

のように得られる。² 式 (2.2.2) は質点の質量 m , ばね定数 k , 減衰係数 γ の減衰調和振動子に対する古典的な運動方程式であり, 振幅が時間経過と共に指数関数的に減少する。一方, 式 (2.2.3) は増幅調和振動子に対する古典的な運動方程式であり, 振幅が時間経過と共に指数関数的に増大する。従って Bateman ラグランジアン (2.2.1) は, 互いに独立な減衰調和振動子と増幅調和振動子から構成される倍化された系を記述することがわかる。

²ラグランジアン (2.2.1) は変換 $(x, y, \gamma) \rightarrow (y, x, -\gamma)$ の下で不変である。従って, 式 (2.2.2) と式 (2.2.3) はこの変換によって互いに関連している。

次に, 新たな変数 [14, 18]

$$x_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad x_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \quad (2.2.4)$$

を導入すると, ラグランジアン (2.2.1) は

$$L_B = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2) - \frac{\gamma}{2}(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2) - \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) \quad (2.2.5)$$

のように書ける. 正準座標 (x_1, x_2) に対応する正準運動量は

$$p_1 := \frac{\partial L_B}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + \frac{\gamma}{2}x_2, \quad p_2 := \frac{\partial L_B}{\partial \dot{x}_2} = -m\dot{x}_2 - \frac{\gamma}{2}x_1 \quad (2.2.6)$$

である. ハミルトニアンは L_B の Legendre 変換によって次のように得られる.

$$\begin{aligned} H &:= p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - L_B \\ &= \left(\frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_-^2x_1^2 \right) - \left(\frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_-^2x_2^2 \right) - \frac{\gamma}{2m}(x_1p_2 + x_2p_1). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ここで, ω_- は

$$\omega_- := \sqrt{\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4m^2}} \quad (2.2.8)$$

のように定義される. ただし, $\omega := \sqrt{k/m}$ である. 本研究では, ω_- が正の実定数であると仮定することにより, 減衰振動もしくは増幅振動の場合のみを扱う.

いま, 正準座標と正準運動量を用いて, Poisson 括弧を

$$\{A, B\} := \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \frac{\partial B}{\partial p_1} - \frac{\partial A}{\partial p_1} \frac{\partial B}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial x_2} \frac{\partial B}{\partial p_2} - \frac{\partial A}{\partial p_2} \frac{\partial B}{\partial x_2} \right) \quad (2.2.9)$$

のように定義する. 式 (2.2.9) から, 正準座標と正準運動量の間 Poisson 括弧は

$$\{x_1, p_1\} = 1, \quad \{x_2, p_2\} = 1 \quad (2.2.10)$$

となり, その他の Poisson 括弧は 0 となる.

Bateman 模型における力学的エネルギーについての考察

式 (2.2.2) に \dot{y} を掛けたものと式 (2.2.3) に \dot{x} を掛けたものを足すことにより,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}\dot{y} + kxy) = 0 \quad (2.2.11)$$

が得られる. 式 (2.2.11) から, Bateman 模型における保存量は

$$H = m\dot{x}y + kxy \quad (2.2.12)$$

であることがわかる. 実際に式 (2.2.12) を正準変数で書き換えると, Bateman ラグランジアン (2.2.1) から得られるハミルトニアンと一致する. 一方, 式 (2.2.2) に \dot{x} を掛けたものと式 (2.2.3) に \dot{y} を掛けたものを足すことにより,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) + \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{k}{2} y^2 \right) \right\} = \gamma (\dot{y} + \dot{x}) (\dot{y} - \dot{x}) \neq 0 \quad (2.2.13)$$

が得られる. ここで, $t = 0$ の場合を除き, 任意の時刻で $\dot{x} \neq \pm \dot{y}$ が成り立つため, 式 (2.2.13) の右辺は 0 ではないことに注意する. 式 (2.2.13) から, Bateman 模型における力学的エネルギーは

$$E = \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right) + \left(\frac{m}{2} \dot{y}^2 + \frac{k}{2} y^2 \right) \quad (2.2.14)$$

となり, 保存量ではないことがわかる. 実際に, 減衰調和振動子の力学的エネルギーは時間経過と共に減少する一方で, 増幅調和振動子の力学的エネルギーは時間経過と共に増大するため, これらの和は一定ではないことがわかる. このように, 減衰調和振動子のような散逸系において, 系のハミルトニアンと力学的エネルギーは異なるものであるということを認識する必要がある.

2.2.2 正準量子化

いま, 正準変数 (x_i, p_i) ($i = 1, 2$) を $\hat{x}_i^\dagger = \hat{x}_i$ と $\hat{p}_i^\dagger = \hat{p}_i$ を満たす Hermite 演算子とみなして, Poisson 括弧を交換関係

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2), \quad \text{その他} = 0 \quad (2.2.15)$$

に置き換えることにより, Bateman 模型の正準量子化を行う. ここで, $\mathbb{1}$ は恒等演算子であり, δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号である. 次に, 新しく演算子

$$\hat{a}_i := \sqrt{\frac{m\omega_-}{2\hbar}} \hat{x}_i + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_-}} \hat{p}_i, \quad (2.2.16a)$$

$$\hat{a}_i^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega_-}{2\hbar}} \hat{x}_i - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_-}} \hat{p}_i \quad (2.2.16b)$$

を定義する. 式 (2.2.15) を用いることで,

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{その他} = 0 \quad (2.2.17)$$

を満たし, ハミルトニアン (2.2.7) に対応するハミルトニアン演算子は

$$H = H_0 + H_1 \quad (2.2.18)$$

のように表される. ここで, H_0 と H_1 は

$$H_0 := \hbar\omega_- \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right), \quad (2.2.19a)$$

$$H_1 := i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right) \quad (2.2.19b)$$

である. 式 (2.2.17) を用いると, H_0 と H_1 は†共役に関して Hermite 性を満たし, 互いに交換することがわかる. 次に

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0 \quad (2.2.20)$$

により定められる素朴な真空状態 $|0\rangle$ を採用することで, Fock 基底ベクトル

$$|n_1, n_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \left(\hat{a}_1^\dagger \right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger \right)^{n_2} |0\rangle \quad (n_i = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.2.21)$$

を構成する. このとき, \hat{a}_i と \hat{a}_i^\dagger はそれぞれ消滅演算子と生成演算子として解釈される. 式 (2.2.20) と式 (2.2.21) の双対形式はそれぞれ

$$\langle 0 | \hat{a}_i^\dagger = 0, \quad (2.2.22)$$

$$\langle n_1, n_2 | := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \langle 0 | (\hat{a}_1)_{n_1} (\hat{a}_2)_{n_2} \quad (2.2.23)$$

によって与えられる. 規格化条件 $\langle 0 | 0 \rangle = 1$ を課して, 式 (2.2.17), 式 (2.2.20) と式 (2.2.22) を用いると

$$\langle m_1, m_2 | n_1, n_2 \rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \quad (2.2.24)$$

が示される. 従って, Fock 基底ベクトル $|n_1, n_2\rangle$ は正の 2 乗ノルム $\langle n_1, n_2 | n_1, n_2 \rangle = 1$ を持ち, 正規直交基底 $\{|n_1, n_2\rangle\}$ によって張られる Fock 空間は, 正定値性を満たす Hilbert 空間であることがわかる. この空間において, 正規直交基底の完全性の条件は

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = \mathbb{1} \quad (2.2.25)$$

である. 演算子 H_0 と H_1 は交換するが, ベクトル $|n_1, n_2\rangle$ は H_0 の固有ベクトルであり, H_1 の固有ベクトルではないことがわかる. 次の 2 つの節において, H_0 と H_1 の同時固有状態 (H の固有状態) を見出すために, 可逆変換を考察する.

2.3 Feshbach-Tikochinsky の量子化法の再定式化

この節では, $SU(1, 1)$ Lie 代数を用いることなく, Feshbach-Tikochinsky の正準量子化法 [6] の再定式化を行う.

まず初めに, 演算子 \bar{a}_i と \bar{a}_i^\dagger を

$$\bar{a}_i := e^{\vartheta X} \hat{a}_i e^{-\vartheta X}, \quad \bar{a}_i^\dagger := e^{\vartheta X} \hat{a}_i^\dagger e^{-\vartheta X} \quad (2.3.1)$$

のように定義する. ここで, ϑ は複素パラメータであり, X は

$$X := \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \quad (2.3.2)$$

によって定義される. 式 (2.3.2) から, $X^\dagger = X$ であることは明らかである. 演算子 $e^{\vartheta X}$ のユニタリー性と, それに関係した特性 $(\bar{a}_i)^\dagger = \bar{a}_i^\dagger$ は, ϑ が純虚数の時にのみ成り立つ. 式 (2.2.17) から

$$[\bar{a}_i, \bar{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{その他} = 0 \quad (2.3.3)$$

であることがわかる. また, 式 (2.3.1) は

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.3.4a)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1^\dagger \\ \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (2.3.4b)$$

のように書かれる. 変換 $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger) \rightarrow (\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ は Bogoliubov 変換に似ているが, 実際にはパラメータ ϑ が純虚数でない限り Bogoliubov 変換ではない. (仮に ϑ が純虚数とすると, $e^{\vartheta X}$ はユニタリー性を満たし, 変換 $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger) \rightarrow (\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ は Bogoliubov 変換 [21, 30] である.)

式 (2.3.4) と式 (2.3.3) を用いると, 演算子 H_0 と H_1 は次のように表される.

$$H_0 = \hbar\omega_- \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 - \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 \right), \quad (2.3.5a)$$

$$H_1 = i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left\{ \left(\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1^\dagger \bar{a}_2^\dagger \right) \cos(2\vartheta) + \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 + \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 + \mathbb{1} \right) \sin(2\vartheta) \right\}. \quad (2.3.5b)$$

ついでながら, X は $X = \bar{a}_1 \bar{a}_2 + \bar{a}_1^\dagger \bar{a}_2^\dagger$ のように表される. 本研究の目的は, H の固有値を見出すことであるため, H_1 が $\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1$, $\bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2$ と $\mathbb{1}$ の線形結合の形を取るように ϑ

を選ぶ。(演算子 H_0 は既に $\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1$ と $\bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2$ の線形結合の形を取っている。) Feshbach-Tikochinsky の量子化法と比較した上で, パラメータ ϑ を $\vartheta = \pm\pi/4$ と定める. その時, H_1 は

$$H_1^{(\pm)} := \pm i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left(\bar{a}_1^\dagger \bar{a}_1 + \bar{a}_2^\dagger \bar{a}_2 + \mathbb{1} \right) \quad (2.3.6)$$

となる. パラメータ ϑ が $\vartheta = \pm\pi/4$ の場合の変換 $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger) \rightarrow (\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ を今後, 擬 Bogoliubov 変換と呼ぶ. ここで, 擬は変換が非ユニタリーであることを意味する. このような非ユニタリー変換は $SU(1, 1)$ Lie 代数に基づく Feshbach-Tikochinsky の量子化法においても同様に考察されている. \dagger 共役に関する $H_1^{(\pm)}$ の Hermite 性, すなわち $(H_1^{(\pm)})^\dagger = H_1^{(\pm)}$ は条件

$$i^\dagger = -i, \quad \gamma^\dagger = -\gamma \quad (2.3.7)$$

の下で成り立つ. 明らかに H_0 と X は \dagger 共役に関して Hermite 性を満たす.

いま, ハミルトニアン演算子 (2.2.18) は, $H^{(\pm)} = H_0 + H_1^{(\pm)}$ と表される. 対応して, $H^{(\pm)}$ を用いると, あらわに時間に依存しない演算子 $A(t)$ に対する Heisenberg 方程式は, $dA/dt = (i\hbar)^{-1} [A, H^{(\pm)}]$ となる. 交換関係 (2.3.3) を用いることで, \bar{a}_i と \bar{a}_i^\dagger に対する Heisenberg 方程式を解くことができる. その時,

$$\bar{a}_1(t) = \bar{a}_1(0)e^{(-i\omega - \pm\lambda)t}, \quad \bar{a}_1^\dagger(t) = \bar{a}_1^\dagger(0)e^{-(-i\omega - \pm\lambda)t}, \quad (2.3.8a)$$

$$\bar{a}_2(t) = \bar{a}_2(0)e^{(i\omega - \pm\lambda)t}, \quad \bar{a}_2^\dagger(t) = \bar{a}_2^\dagger(0)e^{-(i\omega - \pm\lambda)t} \quad (2.3.8b)$$

を得る. ここで, $\lambda := \gamma/2m$ である. 条件 (2.3.7) により, \dagger 共役関係 $(\bar{a}_i(t))^\dagger = \bar{a}_i^\dagger(t)$ は任意の時刻において成立する. 式 (2.3.8) からわかるように, \dagger 共役は時間反転を含む. Feshbach-Tikochinsky の量子化法においても同様に, 波動関数に対する適切な規格化積分を定義するために, 複素共役ではなく, 時間反転が使われている. ハミルトニアン演算子 $H^{(\pm)}$ は時間に依存していないことは明らかである.

次に新たなベクトル

$$|0\rangle\rangle := e^{\vartheta X} |0\rangle, \quad (2.3.9a)$$

$$\langle\langle 0| := \langle 0| e^{-\vartheta X} \quad (2.3.9b)$$

を定義する. (ベクトル $|0\rangle\rangle$ は時々, Bogoliubov 真空状態と呼ばれる.) ここで, 式 (2.2.20) と式 (2.2.22) から

$$\bar{a}_i |0\rangle\rangle = 0, \quad \langle\langle 0| \bar{a}_i^\dagger = 0 \quad (2.3.10)$$

を満たすことがわかる. 従って, $|0\rangle$ と $\langle\langle 0|$ は $(\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ 系の真空状態ベクトルであり, \bar{a}_i と \bar{a}_i^\dagger はそれぞれ消滅演算子と生成演算子であることがわかる. この系において, Fock 基底ベクトルとそれらの双対ベクトルは次のように構成される.

$$|n_1, n_2\rangle\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (\bar{a}_1^\dagger)^{n_1} (\bar{a}_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle\rangle, \quad (2.3.11a)$$

$$\langle\langle n_1, n_2| := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \langle\langle 0| (\bar{a}_1)^{n_1} (\bar{a}_2)^{n_2}. \quad (2.3.11b)$$

これらは式 (2.2.21) と 式 (2.2.23) における基底ベクトルと

$$|n_1, n_2\rangle\rangle = e^{\vartheta X} |n_1, n_2\rangle, \quad (2.3.12a)$$

$$\langle\langle n_1, n_2| = \langle\langle n_1, n_2| e^{-\vartheta X} \quad (2.3.12b)$$

によって関係している. 式 (2.2.24) を用いることにより

$$\langle\langle m_1, m_2|n_1, n_2\rangle\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \quad (2.3.13)$$

が示される. 従って Fock 基底ベクトル $|n_1, n_2\rangle\rangle$ は正の 2 乗ノルム $\langle\langle n_1, n_2|n_1, n_2\rangle\rangle = 1$ を持ち, 正規直交基底 $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ によって張られる Fock 空間は, 正定値性を満たす Hilbert 空間であることがわかる. 完全性の条件 (2.2.25) から

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle\rangle \langle\langle n_1, n_2| = \mathbb{1} \quad (2.3.14)$$

が導かれる. ベクトル $|n_1, n_2\rangle\rangle$ は, $\vartheta = \pm\pi/4$ の場合に H_0 と $H_1^{(\pm)}$ の同時固有状態であり, さらに, ハミルトニアン演算子の固有値方程式

$$H^{(\pm)} |n_1, n_2\rangle\rangle = h_{n_1, n_2}^{(\pm)} |n_1, n_2\rangle\rangle \quad (2.3.15)$$

を満たす. ここで,

$$h_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega_-(n_1 - n_2) \pm i\hbar\lambda(n_1 + n_2 + 1) \quad (2.3.16)$$

である. ただし, $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部はエネルギー固有値と解釈され, 虚部は崩壊幅と解釈される. ハミルトニアン演算子の固有値 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ は Feshbach と Tikochinsky によって以前に得られた固有値 [6] と一致する. このように, 擬 Bogoliubov 変換は, 式 (2.2.18) において与えられたハミルトニアン演算子 H の固有値問題を解く変換であることがわかる.

次に, Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (2.3.17)$$

を考える. この方程式を解くために, $t = 0$ における基底 $\{|n_1, n_2\rangle\}$ の代わりに $t = 0$ における基底 $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ で $|\psi(t)\rangle$ を展開する. その時, 式 (2.3.15) を用いると, 特殊解

$$|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp[-ih_{n_1, n_2}^{(\pm)} t/\hbar] |n_1, n_2\rangle\rangle_{t=0} \quad (2.3.18)$$

を得る. これより明らかに $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(0)\rangle = |n_1, n_2\rangle\rangle_{t=0}$ である. 式 (2.3.18) は時刻 t におけるハミルトニアン固有状態を定める. 式 (2.3.17) の一般解は $|\psi^{(\pm)}(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2}^{\infty} c_{n_1, n_2} |\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ によって与えられる. ここで, c_{n_1, n_2} は複素定数である. 量子数 n_1 と n_2 の可能な値に関わらず, $|\psi_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ は時間発展と共に増加するため成長状態を表しており, 一方, $|\psi_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ は時間発展と共に減少するため, 崩壊状態を表すことがわかる. この結果は, $n_1 = n_2 = 0$ の時でさえ $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ に残る定数項 $\pm i\hbar\lambda$ によるものである. ハミルトニアン演算子 H は † 共役に関して Hermite 性を満たすため, $\langle\psi(t)|$ に対する双対 Schrödinger 方程式は $d\langle\psi(t)|/dt = (-i\hbar)^{-1} \langle\psi(t)|H$ となる. 時刻 $t = 0$ における双対基底 $\{\langle n_1, n_2|\}$ で $\langle\psi(t)|$ を展開し, 式 (2.3.11b) から得られる固有値方程式 $\langle n_1, n_2|H^{(\pm)} = h_{n_1, n_2}^{(\pm)} \langle n_1, n_2|$ を用いることで, 特殊解

$$\langle\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)| := \exp[ih_{n_1, n_2}^{(\pm)} t/\hbar] \langle n_1, n_2|_{t=0} \quad (2.3.19)$$

を得る. また, 式 (2.3.7) によって成り立つ条件 $(h_{n_1, n_2}^{(\pm)})^\ddagger = h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ を用いることにより, $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ と $\langle\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)|$ は ‡ 共役によって互いに関係していることがわかる. 式 (2.3.13) は $\langle\psi_{m_1, m_2}^{(\pm)}(t)|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}$ を導く. そしてこれは $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ の 2 乗ノルムは時間経過で変わらないことを表している. 同様の事実は, Feshbach と Tikochinsky によっても指摘された [6].

いま, $|n_1, n_2\rangle\rangle$ の基本的な 2 乗ノルムを調べることにより, 通常の Hilbert 空間は, $\vartheta = \pm\pi/4$ の場合において明確に定義されないことを示す. まず初めに式 (2.3.9) において定義されるベクトルは

$$|0\rangle\rangle = \frac{1}{\cos \vartheta} \exp[\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \tan \vartheta] |0\rangle, \quad (2.3.20a)$$

$$\langle\langle 0| = \frac{1}{\cos \vartheta} \langle 0| \exp[-\hat{a}_1 \hat{a}_2 \tan \vartheta] \quad (2.3.20b)$$

のように書ける. もしくは同等に

$$|0\rangle\rangle = \frac{1}{\cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} (\tan\vartheta)^n |n, n\rangle, \quad (2.3.21a)$$

$$\langle\langle 0| = \frac{1}{\cos\vartheta} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tan\vartheta)^n \langle n, n| \quad (2.3.21b)$$

として書ける. このとき, $\langle\langle 0|0\rangle\rangle = 1$ を示すために, 関係式 $\sum_{n=0}^{\infty} (-\tan^2\vartheta)^n = (1 + \tan^2\vartheta)^{-1}$ を用いるため, 式(2.3.20)と式(2.3.21)のような表現は, $|\tan\vartheta| < 1$ のような ϑ に対してのみ明確に定義される. この理由のために, 条件 $\vartheta = \pm\pi/4$ はここでは $\vartheta \uparrow \pi/4$ もしくは $\vartheta \downarrow -\pi/4$ として理解される. 状態ベクトル $|0\rangle\rangle$ の \dagger 共役は, 式(2.3.9a) から以下のように定義される.

$$\llbracket 0| := \langle 0|e^{\vartheta^* X^\dagger} = \langle 0|e^{\vartheta^* X}. \quad (2.3.22)$$

式(2.3.20a) と 式(2.3.21a) を用いると, $\llbracket 0|$ は以下の通りに表される.

$$\llbracket 0| = \frac{1}{\cos\vartheta^*} \langle 0| \exp[\hat{a}_1 \hat{a}_2 \tan\vartheta^*] \quad (2.3.23a)$$

$$= \frac{1}{\cos\vartheta^*} \sum_{n=0}^{\infty} (\tan\vartheta^*)^n \langle n, n|. \quad (2.3.23b)$$

パラメータ ϑ が純虚数ではない時, $\llbracket 0|$ は $\langle\langle 0|$ とは異なる. 式(2.3.21a) と 式(2.3.23b) から, $|0\rangle\rangle$ の素朴な 2 乗ノルムは

$$\langle\langle 0|0\rangle\rangle = \frac{1}{|\cos\vartheta|^2 - |\sin\vartheta|^2} = \frac{1}{\cos(\vartheta + \vartheta^*)} \quad (2.3.24)$$

であることがわかる. 仮に, ϑ が純虚数なら, 式(2.3.24) は期待通りに $\langle\langle 0|0\rangle\rangle = 1$ となる. これに対して, 仮に, $\vartheta = \pm\pi/4$ なら, $\llbracket 0|0\rangle\rangle$ は無限に発散する.

より一般に, $|n_1, n_2\rangle\rangle$ の素朴な 2 乗ノルムを調べることができる. ちょうど $\llbracket 0|$ と同じく, $|n_1, n_2\rangle\rangle$ の \dagger 共役は, 式(2.3.12a) から

$$\llbracket n_1, n_2| := \langle n_1, n_2|e^{\vartheta^* X^\dagger} = \langle n_1, n_2|e^{\vartheta^* X} \quad (2.3.25)$$

のように定義される. 式(2.3.25) を用いると, $|n_1, n_2\rangle\rangle$ の素朴な 2 乗ノルムは

$$\langle\langle n_1, n_2|n_1, n_2\rangle\rangle = \langle n_1, n_2|e^{(\vartheta + \vartheta^*)X}|n_1, n_2\rangle \quad (2.3.26)$$

によって与えられる. 例えば,

$$\langle\langle 1, 0 | 1, 0 \rangle\rangle = \langle\langle 0, 1 | 0, 1 \rangle\rangle = \frac{1}{(\cos \Theta)^2}, \quad (2.3.27a)$$

$$\langle\langle 1, 1 | 1, 1 \rangle\rangle = \frac{2 - (\cos \Theta)^2}{(\cos \Theta)^3} \quad (2.3.27b)$$

を得ることができる. ここで, $\Theta := \vartheta + \vartheta^*$ である. さらに, 帰納法を用いると

$$\langle\langle n_1, n_2 | n_1, n_2 \rangle\rangle \simeq \frac{c}{(\cos \Theta)^{n_1+n_2+1}} \quad (\Theta \rightarrow \pm\pi/2) \quad (2.3.28)$$

を得る. ここで, c は実定数である. この素朴な 2 乗ノルム $\langle\langle n_1, n_2 | n_1, n_2 \rangle\rangle$ は $\vartheta \rightarrow \pm\pi/4$ の極限で無限に発散するため, 素朴な 2 乗ノルムによって張られる通常の Hilbert 空間は, $\vartheta = \pm\pi/4$ の場合においては定義されないことがわかる. 従って, $\vartheta = \pm\pi/4$ の場合において, H_1 の Hermite 性は通常の Hilbert 空間においては実際には意味を持たない. 結果として H_1 は, 式 (2.3.15) と 式 (2.3.16) で示した純虚数の固有値 $\pm i\hbar\lambda(n_1 + n_2 + 1)$ を持つことができる. Feshbach と Tikochinsky によっても, 異なる文脈において同様の考察が行われている [6]. ここで述べた明確に定義されない Hilbert 空間の利用を避けるために, 本研究では実際に内積 (2.3.13) により張られる明確に定義された Hilbert 空間を考察する. いまの量子化法において, この明確に定義された Hilbert 空間を適用するべきであることは明らかである.

演算子で表した式 (2.2.4) と, 式 (2.2.16), 式 (2.3.4), 式 (2.3.8) を用いることで, $\vartheta = \pi/4$ に対して

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{-\lambda t} \left(\bar{a}_1^\dagger(0) e^{i\omega_- t} + \bar{a}_2^\dagger(0) e^{-i\omega_- t} \right), \quad (2.3.29a)$$

$$\hat{y}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{\lambda t} \left(\bar{a}_1(0) e^{-i\omega_- t} - \bar{a}_2(0) e^{i\omega_- t} \right) \quad (2.3.29b)$$

を得る. また, $\vartheta = -\pi/4$ に対して

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{-\lambda t} \left(\bar{a}_1(0) e^{-i\omega_- t} + \bar{a}_2(0) e^{i\omega_- t} \right), \quad (2.3.30a)$$

$$\hat{y}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{\lambda t} \left(\bar{a}_1^\dagger(0) e^{i\omega_- t} - \bar{a}_2^\dagger(0) e^{-i\omega_- t} \right) \quad (2.3.30b)$$

を得る. 式 (2.3.29a) と 式 (2.3.30a) が式 (2.2.2) を満たし, 式 (2.3.29b) と 式 (2.3.30b) が式 (2.2.3) を満たす. 従って, ここで再定式化された Feshbach-Tikochinsky の量子化法において, 演算子で表した式 (2.2.2) と 式 (2.2.3) が成り立つことがわかる.

仮に \hat{a}_2 と \hat{a}_2^\dagger がそれぞれ, \hat{a}_1 と \hat{a}_1^\dagger のチルダ共役³とするならば, ハミルトニアン演算子 (2.2.18) は TFD [20, 21] において論じられたハミルトニアン演算子の一つと同じ形式となる. Celeghini らはこの事実に注目し, TFD の枠組みに従って, Bateman 模型の量子論的な側面を研究した [12, 13]. 彼らは, Bateman 模型の場の理論的な一般化の必要性を主張した. 熱場の力学的な手法においては, H_0 に含まれる $-\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2$ の負の符号は, 熱的自由度を記述するのに必須である. しかしながら, 純粋に力学的な視点から考えると, 仮に相互作用を入れると, この負の符号は必ず系の不安定性の問題を引き起こす. 実際, $\text{Re} h_{n_1, n_2}^{(\pm)} = \hbar \omega_-(n_1 - n_2)$ によって与えられ, 系のエネルギー固有値として解釈される H_0 の固有値は, $-n_2$ の存在のために下限がない. その結果, 系の安定性が保障されない. この望ましくない状況は, 虚数スケーリング量子化法 [28, 29] を Bateman 模型に適用することにより解決できる.

2.4 虚数スケーリング量子化法

この節では, Bateman 模型に対する虚数スケーリング量子化を扱う.

初めに, 演算子 \tilde{a}_i と \tilde{a}_i^\S を

$$\tilde{a}_i := e^{\varphi Y} \hat{a}_i e^{-\varphi Y}, \quad \tilde{a}_i^\S := e^{\varphi Y} \hat{a}_i^\dagger e^{-\varphi Y} \quad (2.4.1)$$

により定義する. ここで, φ は複素パラメータであり, Y は

$$Y := -\frac{i}{2} (\hat{a}_2^2 - \hat{a}_2^{\dagger 2}) \quad (2.4.2)$$

によって定義される. いま, $Y^\dagger = Y$ であることは明らかである. 演算子 $e^{\varphi Y}$ のユニタリー性とそれに関係した特性 $(\tilde{a}_i)^\dagger = \tilde{a}_i^\S$ は, φ が純虚数の時にのみ成り立つ. 演算子 Y は $Y = -i(\tilde{a}_2^2 - \tilde{a}_2^{\S 2})/2$ のように表すことができる. このことから Y は \S 共役に関して Hermite 性を満たし, 即ち $Y^\S = Y$ であることがわかる. 式 (2.2.17) は

$$[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j^\S] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{その他} = 0 \quad (2.4.3)$$

を導く. 式 (2.4.2) における Y の定義から, すぐに

$$\tilde{a}_1 = \hat{a}_1, \quad \tilde{a}_1^\S = \hat{a}_1^\dagger \quad (2.4.4)$$

³TFD において, 通常の演算子に加えてチルダ演算子を導入して, 系を倍化する. チルダ演算子は通常の演算子のチルダ共役となっている.

であることがわかる. いま, φ が純虚数であり, 従って $e^{\varphi Y}$ がユニタリー演算子であると仮定すると, 変換 $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger) \rightarrow (\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\S)$ は, $(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger)$ のスクイーズ変換となる [21, 31]. 今後, 本研究ではむしろ φ を実数の値 $\varphi = \pi/2$ になるように選ぶ. その時, 式 (2.4.1) から,

$$\tilde{a}_2 = -i\hat{a}_2^\dagger, \quad \tilde{a}_2^\S = -i\hat{a}_2 \quad (2.4.5)$$

を得る. 変換 $(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger) \rightarrow (\tilde{a}_2, \tilde{a}_2^\S) = (-i\hat{a}_2^\dagger, -i\hat{a}_2)$ は, まさに参考文献 [28, 29] において論じられた虚数スケール変換である. スクイーズ変換の類推からこの非ユニタリーな変換が得られたので, 以下では, それを擬スクイーズ変換と呼ぶことにする.

次に, 演算子 \check{a}_i と \check{a}_i^\S を

$$\check{a}_i := e^{\chi Z} \tilde{a}_i e^{-\chi Z}, \quad \check{a}_i^\S := e^{\chi Z} \tilde{a}_i^\S e^{-\chi Z} \quad (2.4.6)$$

により定義する. ここで, χ は $\chi^\S = -\chi$ を満たす純虚数パラメータであると仮定する. そして Z は

$$Z := \tilde{a}_1^\S \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2^\S \tilde{a}_1 \quad (2.4.7)$$

により定義される. 明らかに, Z は \S 共役に関して Hermite 性を満たす. 従って, \S 共役に関する $e^{\chi Z}$ のユニタリー性と \S 共役関係 $(\check{a}_i)^\S = \check{a}_i^\S$ はそれに付随して満たされる. 式 (2.4.3) は

$$[\check{a}_i, \check{a}_j^\S] = \delta_{ij} \mathbb{1}, \quad \text{その他} = 0 \quad (2.4.8)$$

を導く. 演算子 \check{a}_i は \tilde{a}_1 と \tilde{a}_2 の線形結合として書かれる. 同様に, 演算子 \check{a}_i^\S は \tilde{a}_1^\S と \tilde{a}_2^\S の線形結合として書かれる. 従って, 変換 $(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\S) \rightarrow (\check{a}_i, \check{a}_i^\S)$ はユニタリー変換である. さらに, 式 (2.4.4) と式 (2.4.5) を用いることで

$$\begin{pmatrix} \check{a}_1 \\ \check{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & i \sinh \chi \\ -\sinh \chi & -i \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.4.9a)$$

$$\begin{pmatrix} \check{a}_1^\S \\ \check{a}_2^\S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -i \sinh \chi \\ \sinh \chi & -i \cosh \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} \quad (2.4.9b)$$

が得られる.

いま, 式 (2.4.9) と 式 (2.4.8) を用いることで, 以下の通りに式 (2.2.19) で定義した演算子 H_0 と H_1 を表すことができる.⁴

$$H_0 = \hbar\omega_- \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 + \check{a}_2^\S \check{a}_2 + \mathbb{1} \right), \quad (2.4.10a)$$

$$H_1 = \frac{\hbar\gamma}{2m} \left\{ \left(\check{a}_1^\S \check{a}_2 - \check{a}_2^\S \check{a}_1 \right) \cosh(2\chi) + \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 - \check{a}_2^\S \check{a}_2 \right) \sinh(2\chi) \right\}. \quad (2.4.10b)$$

ついでながら, Z は $Z = \check{a}_1^\S \check{a}_2 + \check{a}_2^\S \check{a}_1$ のように表される. 本研究の目的は, 虚数スケール量子化法の枠組みで $H = H_0 + H_1$ の固有値を見出すことである. この目標を達成するために, H_1 が $\check{a}_1^\S \check{a}_1$ と $\check{a}_2^\S \check{a}_2$ の線形結合の形をとるように, χ が虚数の値 $\chi = \pm i\pi/4$ となるように選ぶ. (演算子 H_0 は既に $\check{a}_1^\S \check{a}_1$, $\check{a}_2^\S \check{a}_2$ と $\mathbb{1}$ の線形結合の形を取っている.) 演算子 H_1 は $\chi = \pm i\pi/4$ と取ると,

$$\check{H}_1^{(\pm)} := \pm i \frac{\hbar\gamma}{2m} \left(\check{a}_1^\S \check{a}_1 - \check{a}_2^\S \check{a}_2 \right) \quad (2.4.11)$$

となる. \S 共役に関する $\check{H}_1^{(\pm)}$ の Hermite 性, すなわち $(\check{H}_1^{(\pm)})^\S = \check{H}_1^{(\pm)}$ は条件

$$i^\S = -i, \quad \gamma^\S = -\gamma \quad (2.4.12)$$

の下で成り立つ. 演算子 H_0 と Z は \S 共役に関して Hermite 性を満たすことは明らかである.

ハミルトニアン演算子 (2.2.18) は, いま $\check{H}^{(\pm)} = H_0 + \check{H}_1^{(\pm)}$ と表される. 対応して, あらわに時間に依存しない演算子 $A(t)$ に対する Heisenberg 方程式は $dA/dt = (i\hbar)^{-1} [A, \check{H}^{(\pm)}]$ となる. 交換関係 (2.4.8) を用いることにより, \check{a}_i と \check{a}_i^\S に対する Heisenberg 方程式を解くことができる. その時,

$$\check{a}_1(t) = \check{a}_1(0)e^{(-i\omega_- \pm \lambda)t}, \quad \check{a}_1^\S(t) = \check{a}_1^\S(0)e^{-(-i\omega_- \pm \lambda)t}, \quad (2.4.13a)$$

$$\check{a}_2(t) = \check{a}_2(0)e^{(-i\omega_- \mp \lambda)t}, \quad \check{a}_2^\S(t) = \check{a}_2^\S(0)e^{-(-i\omega_- \mp \lambda)t} \quad (2.4.13b)$$

を得る. 条件 (2.4.12) により, \S 共役関係 $(\check{a}_i(t))^\S = \check{a}_i^\S(t)$ は任意の時刻において成り立つ. 式 (2.4.13) から, 第 2.3 節において扱われた \ddagger 共役と同じく, \S 共役も時間反転を含むことがわかる. ハミルトニアン演算子 $\check{H}^{(\pm)}$ は時間依存していないことは明らかである.

⁴ 虚数スケール量子化法に関係した対称群は, 式 (2.4.10a) からわかるように, $SU(1,1)$ の代わりに $SU(2)$ である. 式 (2.2.19a) における H_0 は, $SU(1,1)$ の Casimir 演算子に対応している. 一方で, 式 (2.4.10a) における H_0 は $SU(2)$ の Casimir 演算子に対応している. 虚数スケール変換 $(\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger) \rightarrow (\check{a}_2, \check{a}_2^\S) = (-i\hat{a}_2^\dagger, -i\hat{a}_2)$ により, $SU(2)$ は $SU(1,1)$ と関係していることがわかる.

いま, 新たなベクトルを

$$|0\rangle := e^{\varphi Y}|0\rangle, \quad \langle 0| := \langle 0|e^{-\varphi Y} \quad (2.4.14)$$

のように定義する. ここで, 式 (2.2.20) と 式 (2.2.22) から

$$\tilde{a}_i|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\tilde{a}_i^\dagger = 0 \quad (2.4.15)$$

を満たす.⁵ また, 式 (2.4.6) と 式 (2.4.15) から

$$\check{a}_i|0\rangle = 0, \quad \langle 0|\check{a}_i^\dagger = 0 \quad (2.4.16)$$

を満たす. 従って, $|0\rangle$ と $\langle 0|$ は $(\tilde{a}_i, \tilde{a}_i^\dagger)$ と $(\check{a}_i, \check{a}_i^\dagger)$ の系のどちらにも共通な真空状態である. 式 (2.4.15) と 式 (2.4.16) から, \tilde{a}_i と \check{a}_i は消滅演算子であり, \tilde{a}_i^\dagger と \check{a}_i^\dagger は生成演算子であることがわかる. $(\check{a}_i, \check{a}_i^\dagger)$ 系において, Fock 基底ベクトルとそれらに共役なベクトルは次のように構成される.

$$|n_1, n_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \left(\tilde{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\tilde{a}_2^\dagger\right)^{n_2} |0\rangle, \quad (2.4.17a)$$

$$\langle n_1, n_2| := \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} \langle 0| \left(\tilde{a}_1\right)^{n_1} \left(\tilde{a}_2\right)^{n_2}. \quad (2.4.17b)$$

これらは, 式 (2.2.21) と 式 (2.2.23) における基底ベクトルと

$$|n_1, n_2\rangle = e^{xZ} e^{\varphi Y} |n_1, n_2\rangle, \quad (2.4.18a)$$

$$\langle n_1, n_2| = \langle n_1, n_2| e^{-\varphi Y} e^{-xZ} \quad (2.4.18b)$$

によって関係している. 式 (2.2.24) を用いることにより

$$\langle m_1, m_2|n_1, n_2\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2} \quad (2.4.19)$$

が示される. 従って, Fock 基底ベクトル $|n_1, n_2\rangle$ は正の 2 乗ノルム $\langle n_1, n_2|n_1, n_2\rangle = 1$ を持ち, 正規直交基底 $\{|n_1, n_2\rangle\}$ によって張られる Fock 空間は正定値性を満たす Hilbert 空間であることがわかる. 完全性の条件 (2.2.25) から

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |n_1, n_2\rangle \langle n_1, n_2| = \mathbb{1} \quad (2.4.20)$$

⁵ 仮に $|\tan \varphi| < 1$ なら, ベクトル $|0\rangle$ と $\langle 0|$ は

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \exp \left[\frac{i}{2} \hat{a}_2^{\dagger 2} \tan \varphi \right] |0\rangle, \\ \langle 0| = \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \langle 0| \exp \left[\frac{i}{2} \hat{a}_2^2 \tan \varphi \right]$$

のように書かれる. これらの表現は本研究の場合 $\varphi = \pi/2$ には適用できない.

が導かれる. ベクトル $|n_1, n_2\rangle\rangle$ は, $\varphi = \pi/2$ と $\chi = \pm i\pi/4$ の場合に H_0 と $\check{H}_1^{(\pm)}$ の同時固有ベクトルであり, ハミルトニアン演算子の固有値方程式

$$\check{H}^{(\pm)}|n_1, n_2\rangle\rangle = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}|n_1, n_2\rangle\rangle \quad (2.4.21)$$

を満たす. ここで,

$$\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega_-(n_1 + n_2 + 1) \pm i\hbar\lambda(n_1 - n_2) \quad (2.4.22)$$

である. 式 (2.4.22) は, Feshbach と Tikochinsky によって得られた固有値 (2.3.16) とは完全に異なる. 実際, $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} = \hbar\omega_-(n_1 + n_2 + 1)$ により与えられる H_0 の固有値には下限があり, 系の安定性が保障される. さらに, $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ は真空状態エネルギー $\hbar\omega_-$ を持つ. このように, 虚数スケーリング変換とユニタリー変換の組み合わせは, 式 (2.2.18) で与えられたハミルトニアン演算子 H の固有値問題を解く変換であり, Feshbach-Tikochinsky の量子化法において生じる不安定性の問題を解決する.

いま, Schrödinger 方程式 (2.3.17) を用いて, $t = 0$ における基底 $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ の代わりに, $t = 0$ における基底 $\{|n_1, n_2\rangle\}$ で状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を展開する. その時, 式 (2.4.21) を用いることで, Schrödinger 方程式の特殊解

$$|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp[-i\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar]|n_1, n_2\rangle\rangle_{t=0} \quad (2.4.23)$$

を得る. これより明らかに $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(0)\rangle = |n_1, n_2\rangle\rangle_{t=0}$ である. 式 (2.4.23) は, 時刻 t におけるハミルトニアン固有状態を定める. 一般解は $|\check{\psi}^{(\pm)}(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \check{c}_{n_1, n_2} |\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ によって与えられる. ここで, \check{c}_{n_1, n_2} は複素定数である. 特殊解 $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ と $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ はどちらも, n_1 と n_2 の可能な値に依存して, 崩壊状態もしくは成長状態を表すことがわかる. 仮に $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ が崩壊状態の状態ベクトルなら, $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ は成長状態の状態ベクトルである. 一方, 仮に $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ が成長状態の状態ベクトルなら, $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ は崩壊状態の状態ベクトルである. ただし, $n_1 = n_2$ の時に $\text{Im}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ は消えたため, $n_1 = n_2$ の状態ベクトル $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ は γ を含んでおらず, 安定状態を表すことは注目すべき点である. 従って, Feshbach-Tikochinsky の量子化法とは異なり, 虚数スケーリング量子化法では, 崩壊状態と成長状態に加えて, 安定状態が現われることがわかる. ここで, 双対 Schrödinger 方程式 $d\langle\psi(t)|/dt = (-i\hbar)^{-1}\langle\psi(t)|H$ を用いる. 時刻 $t = 0$ における双対基底 $\{(\langle n_1, n_2|)\}$ で $\langle\psi(t)|$ を展開し, 式 (2.4.17b) から得られる固有値方程式 $(\langle n_1, n_2| \check{H}^{(\pm)} = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(\langle n_1, n_2|$ を用いることで, 特殊解

$$\langle\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)| := \exp[i\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar](\langle n_1, n_2|_{t=0} \quad (2.4.24)$$

を得る. また, 式 (2.4.12) によって成り立つ条件 $(\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)})^\S = \check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ を用いることで, $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ と $\langle\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)|$ は \S 共役によって互いに関係していることがわかる. 式 (2.4.19) は $\langle\check{\psi}_{m_1, m_2}^{(\pm)}(t)|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle = \delta_{m_1 n_1} \delta_{m_2 n_2}$ を導く. そしてこれは, $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ の 2 乗ノルムは時間経過で変わらないことを表している. 同様の結果は第 2.3 節においても見出された.

演算子で表した式 (2.2.4) と, 式 (2.2.16), 式 (2.4.9), 式 (2.4.13) を用いることで, $\chi = i\pi/4$ に対して

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{-\lambda t} \left(\check{a}_1^\S(0) e^{i\omega_- t} + i\check{a}_2(0) e^{-i\omega_- t} \right), \quad (2.4.25a)$$

$$\hat{y}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{\lambda t} \left(\check{a}_1(0) e^{-i\omega_- t} - i\check{a}_2^\S(0) e^{i\omega_- t} \right) \quad (2.4.25b)$$

を得ることができ, $\chi = -i\pi/4$ に対して

$$\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{-\lambda t} \left(\check{a}_1(0) e^{-i\omega_- t} + i\check{a}_2^\S(0) e^{i\omega_- t} \right), \quad (2.4.26a)$$

$$\hat{y}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_-}} e^{\lambda t} \left(\check{a}_1^\S(0) e^{i\omega_- t} - i\check{a}_2(0) e^{-i\omega_- t} \right) \quad (2.4.26b)$$

を得ることができる. 式 (2.4.25a) と式 (2.4.26a) は式 (2.2.2) を満たして, 式 (2.4.25b) と式 (2.4.26b) は式 (2.2.3) を満たす. この方法において, 虚数スケールリング量子化法においても, 演算子で表した式 (2.2.2) と式 (2.2.3) が成り立つことがわかる. ここで, $\chi = i\pi/4$ と $\chi = -i\pi/4$ どちらの場合においても, $\hat{x}^\S = \hat{y}$ と $\hat{y}^\S = \hat{x}$ である. これらの関係と式 (2.4.12) によって与えられる関係 $\gamma^\S = -\gamma$ を用いると, \S 共役は変換 $(\hat{x}, \hat{y}, \gamma) \rightarrow (\hat{y}, \hat{x}, -\gamma)$ に対応して, この変換はラグランジアン (2.2.1) を不変にすることがわかる. 一方で, Feshbach-Tikochinsky の量子化法において, \ddagger 共役は変換 $(\hat{x}, \hat{y}, \gamma) \rightarrow (\pm i\hat{p}_x/m\omega_-, \mp i\hat{p}_y/m\omega_-, -\gamma)$ に対応していることがわかる. ここで, p_x と p_y はそれぞれ x と y に対する正準共役運動量として定義される. この結果から, \S 共役とは異なり, \ddagger 共役はラグランジアンのレベルにおいて, 古典的な対応物を持たないことがわかる.

2.5 まとめと今後の課題

この章では, Bateman 模型に対する 2 つの量子化法を論じた. 1 つは $SU(1, 1)$ Lie 代数を用いることなく, Feshbach-Tikochinsky の量子化法で導かれる結果を簡潔に

再現する方法である。そしてもう1つはもともと、Pais-Uhlenbeck 模型に対して提案された虚数スケーリング量子化法である。前者は Bateman 模型に対して擬 Bogoliubov 変換を適用することにより展開され、後者は Bateman 模型に対して虚数スケーリング変換とユニタリー変換の組合わせを適用することで展開された。従ってこれらの2つの量子化法は、 \hat{a}_i と \hat{a}_i^\dagger の異なる変換に基づき、同等の立場で理解される。

本研究では、実際に、Bateman 模型のハミルトニアン演算子 H に対する固有値問題を解いた。擬 Bogoliubov 変換を用いて、簡潔に Feshbach と Tikochinsky によって以前に見出されたハミルトニアン演算子の固有値 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ [6] を得た。さらに、虚数スケーリング量子化法 [28, 29] を用いることにより、他のハミルトニアン演算子の固有値 $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ を導出した。ハミルトニアン演算子の固有値 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部は $n_1 - n_2$ に比例していて、虚部は $n_1 + n_2 + 1$ に比例している。これに対して、 $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部は $n_1 + n_2 + 1$ に比例していて、虚部は $n_1 - n_2$ に比例している。以上のことから、 $\text{Re}\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ には下限があることがわかり、これより固有値 $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ は固有値 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ よりも力学的な観点から望ましいことがわかる。(対照的に、TFD の観点からは、 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ が望ましい。) ハミルトニアン演算子の固有値 $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ と共に、式 (2.4.23) のような Schrödinger 方程式の特殊解を得た。特に、 $n_1 = n_2$ の場合の特殊解は安定状態を表していることを示した。このような安定状態は、Feshbach-Tikochinsky の量子化法には現われず、虚数スケーリング量子化法においてのみ現われる。また、安定状態は古典力学において理解されない。なぜなら、関係式 $4mk > \gamma^2$ が成立しているならば、式 (2.2.2) の全ての解は減衰振動を表しており、式 (2.2.3) の全ての解は増幅振動を表すからである。このような安定状態の存在は、量子論に特有なものであると考えられる。

本研究では、1つの演算子 H に対して定められる2つのユニタリー非同値な基底 $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ と $\{|n_1, n_2\rangle\rangle\}$ に対応する2つの異なる固有値の集まり $\{h_{n_1, n_2}^{(\pm)}\}$ と $\{\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}\}$ を得ることができた。この事実から、 H のような力学変数の可能な値を導出する場合には、量子力学はある意味の柔軟性を持つことがわかる。すなわち、力学変数の可能な値は、基底の選択に依存して得られる。この柔軟性は、力学変数のみから構成される古典力学とは異なり、量子力学は2つの基本的なもの、すなわち力学変数(演算子として扱われる)と状態ベクトルから構成されることに起因する。

物理的な視点から、本研究で提案した定式化と結果が適用できるような散逸系を実際に見つけ出すことは今後の課題である。さらに、相互作用を含む系や多体系に

Bateman 模型を拡張することは、場の理論の視点からも大変興味深い。

既に述べた様に、Bateman 模型は、減衰調和振動子と増幅調和振動子の両方を同等に扱うため、減衰調和振動子のみに対する模型とは言えない。解析力学の枠組みにおいて、減衰調和振動子のみを矛盾無く扱うために、Caldirola-Kanai ラグランジアン⁶とは異なり、時間にあらわに依存しない新たなラグランジアンを見出す必要がある。この問題は次章で論じる。

2.6 補遺

2.6.1 固有関数の考察

ここでは、この章で論じた 2 つの量子化法において、得られる固有関数は 2 乗可積分関数であることを示す。初めに、同時固有値方程式

$$\langle x_1, x_2 | \hat{x}_i = x_i \langle x_1, x_2 | \quad (i = 1, 2) \quad (2.6.1)$$

を考える。(式 (2.2.15) からわかるように、 \hat{x}_1 と \hat{x}_2 は交換するため、 \hat{x}_1 と \hat{x}_2 の同時固有状態が存在する。) 同時固有ベクトル $\langle x_1, x_2 |$ は固有値 $x_i (\in \mathbb{R})$ によって定められる。式 (2.2.15) と式 (2.6.1) から、

$$\langle x_1, x_2 | \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x_1, x_2 | \quad (i = 1, 2) \quad (2.6.2)$$

が成り立つことがわかる。式 (2.2.16)、式 (2.6.1)、式 (2.6.2) を用いることで

$$\langle x_1, x_2 | \hat{a}_i = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \langle x_1, x_2 |, \quad (2.6.3a)$$

$$\langle x_1, x_2 | \hat{a}_i^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \langle x_1, x_2 | \quad (2.6.3b)$$

⁶Caldirola-Kanai ラグランジアンは

$$L_{\text{CK}} = e^{(\gamma/m)t} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 \right)$$

のように与えられる [11]。このラグランジアンは、実際に式 (2.2.2) を与え、減衰調和振動子のみを記述する。しかしながら、 L_{CK} に基づく正準量子化は幾つかの問題点が指摘されている [4, 5]。この L_{CK} そのものではなくて、 L_{CK} に対応するハミルトニアンは実際には Caldirola と Kanai によって独立に考えられた [1, 2, 11]。倍化されたラグランジアン $2L_{\text{CK}}$ は Bateman ラグランジアン (2.2.1) に $y = e^{(\gamma/m)t}x$ を代入することにより、Bateman によって早くから見出された [3]。このような理由で、 L_{CK} は時々 Bateman-Caldirola-Kanai ラグランジアンと呼ばれる。ラグランジアン L_{CK} は、参考文献 [32] において扱われたスタンダードラグランジアンの特別な場合として理解される。

を示すことができる。(消滅・生成演算子を用いて固有関数を求めることに関しては文献 [33] を参照せよ.)

いま, \mathcal{B} と \mathcal{K} をそれぞれ, $(\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger)$ 系に対するブラ空間とケット空間とする. また, $\bar{\mathcal{B}}$ と $\bar{\mathcal{K}}$ をそれぞれ, $(\bar{a}_i, \bar{a}_i^\dagger)$ 系に対するブラ空間とケット空間とする. ブラ空間 \mathcal{B} は \mathcal{K} の双対空間であり, ブラ空間 $\bar{\mathcal{B}}$ は $\bar{\mathcal{K}}$ の双対空間である. 適切な内積は \mathcal{B} の要素と \mathcal{K} の要素の間もしくは, $\bar{\mathcal{B}}$ の要素と $\bar{\mathcal{K}}$ の要素の間で定義される. ブラ空間 \mathcal{B} ($\bar{\mathcal{B}}$) の要素とケット空間 \mathcal{K} ($\bar{\mathcal{K}}$) の要素の間の内積は, 特別な意味を持つ可能性もあるが, 通常は意味を持たない.

ケット空間 \mathcal{K} の任意の要素 $|\psi\rangle$ は $|\psi\rangle = e^{\vartheta X}|\psi\rangle$ により $\bar{\mathcal{K}}$ の要素 $|\psi\rangle$ と関係している. この関係は可逆であるため, \mathcal{K} と $\bar{\mathcal{K}}$ は同型であることがわかる. 同様に, ブラ空間 \mathcal{B} の任意の要素 $\langle\phi|$ は $\langle\phi| = \langle\phi|e^{-\vartheta X}$ により $\bar{\mathcal{B}}$ の要素 $\langle\phi|$ と関係している. この関係もまた可逆であるため, \mathcal{B} と $\bar{\mathcal{B}}$ は同型である. いま, $\langle\phi|$ と $|\psi\rangle$ の間の関係式

$$\langle\langle\phi|\psi\rangle\rangle = \langle\phi|\psi\rangle, \quad (2.6.4a)$$

$$|\psi\rangle\rangle\langle\phi| = e^{\vartheta X}|\psi\rangle\langle\phi|e^{-\vartheta X} \quad (2.6.4b)$$

が成り立つ. 式 (2.6.4a) から, 適切な内積は系の選び方には依存しないことがわかる. また, 式 (2.6.4b) は式 (2.3.1) に対応した式であることがわかる.

演算子 $\hat{x}_i, \hat{p}_i, \hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ はいずれも \mathcal{B} と \mathcal{K} の上で定義される. 従って, Fock 基底ベクトル (2.2.21) は \mathcal{K} の要素であり, 固有ベクトル $\langle x_1, x_2|$ ($x_i \in \mathbb{R}$) は \mathcal{B} の要素であることは明らかである. 式 (2.2.20), 式 (2.2.21), 式 (2.6.3) を用いることにより, 内積

$$\begin{aligned} &\langle x_1, x_2|n_1, n_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \\ &\quad \times H_{n_1}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_1\right) H_{n_2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_2\right) \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right] \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

を得る. ここで, H_n は n 次の Hermite 多項式を表している. 式 (2.6.4a) と式 (2.6.5) を組み合わせることで

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \\ &\quad \times H_{n_1}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_1\right) H_{n_2}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_2\right) \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right] \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

が得られる. ただし, $\bar{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ は式 (2.3.12a) を用いて

$$\bar{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2) := \langle\langle x_1, x_2 | n_1, n_2 \rangle\rangle \quad (2.6.7)$$

のように定義される. ここで, $\langle\langle x_1, x_2 | := \langle x_1, x_2 | e^{-\vartheta X}$ である. 固有ベクトル $\langle\langle x_1, x_2 |$ は \bar{B} の要素であり, $|n_1, n_2\rangle\rangle$ は \bar{K} の要素であるため, $\langle\langle x_1, x_2 | n_1, n_2 \rangle\rangle$ は適切な内積であることがわかる. 従って, 2 乗可積分関数 $\bar{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ は $|n_1, n_2\rangle\rangle$ に対応する固有関数であることが示される.

式 (2.3.1) と式 (2.6.3) から

$$\langle\langle x_1, x_2 | \bar{a}_i = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \langle\langle x_1, x_2 |, \quad (2.6.8a)$$

$$\langle\langle x_1, x_2 | \bar{a}_i^\dagger = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_i - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \langle\langle x_1, x_2 | \quad (2.6.8b)$$

を得る. 実際に, 式 (2.3.10), 式 (2.3.11a), 式 (2.6.8) を用いることにより, 式 (2.6.6) を直接導くことができる.

状態ベクトル $|n_1, n_2\rangle\rangle$ に対応する 2 乗可積分の固有関数は式 (2.6.6) と同じ式として得られる. 実際に, 固有関数は

$$\begin{aligned} & \check{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^{(n_1+n_2)} n_1! n_2!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \\ & \times H_{n_1} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_1 \right) H_{n_2} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x_2 \right) \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} (x_1^2 + x_2^2) \right] \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

のように得られる. ただし, $\check{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2)$ は式 (2.4.18a) を用いて

$$\check{\varphi}_{n_1, n_2}(x_1, x_2) := (\langle\langle x_1, x_2 | n_1, n_2 \rangle\rangle) \quad (2.6.10)$$

のように定義される. ここで, $(\langle\langle x_1, x_2 | := \langle x_1, x_2 | e^{-\varphi Y} e^{-\chi Z}$ である.

第3章 修正された Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の正準量子化

この章では、修正された Bateman ラグランジアンに基づき、減衰調和振動子の量子化に対する新たな手法を提案する。これにより、減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いを明らかにする。本研究では、修正された Bateman ラグランジアンから定まり、系の全エネルギーに対応するハミルトニアン演算子に加えて、減衰調和振動子に対するエネルギー演算子を定義する。減衰調和振動子のエネルギー固有値は等しい間隔を保ちながら時間経過と共に指数関数的に減少し、Schrödinger 方程式に従って、エネルギー固有状態間の遷移が起こることを示す。その際に、遷移確率の時間変化を区別するために、新たな臨界定数が現れることを指摘する。

3.1 導入

量子論における単純な調和振動子は、そのエネルギー固有値が等しい間隔で量子化されるものとして理解されている。このとき、量子論における減衰調和振動子はどのように理解されるのかを問うのは自然なことである。この章の主な目的はこれに答えることであり、そのために、初めに減衰調和振動子の解析力学を再考察する。

減衰調和振動子の解析力学とその量子化への適用は、非常に多くの人々によって、以前から繰り返し研究されてきた [1–7, 9–19, 22–24, 32, 34–37]。最も議論されている減衰調和振動子のラグランジアンの一つは Bateman ラグランジアン (2.2.1) である。第2章で述べたように、Bateman ラグランジアンは、実際に減衰調和振動子の運動方程式 $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ を与え、時間にあらわに依存しないという望ましい性質を持っている。しかしながら、Bateman ラグランジアンは増幅調和振動子の運動方程式 $m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0$ も同時に与える。従って、Bateman ラグランジアンは減衰調和振動子そのものではなくて、互いに結合していない減衰調和振動子と増幅

調和振動子から構成される倍化された系を記述する。この系の量子化は最近まで多様な興味深い観点から研究されている [6,7,12–19,22–24]。しかしながら、式 (2.2.4) で示した通り、量子化の手順において、 $(x \pm y)/\sqrt{2}$ が基本的な変数に選ばれる。このため、第 2 章で論じた量子化は減衰調和振動子そのものを量子化しているのか疑問である。

本研究では、量子力学における減衰調和振動子を正しく理解するために、減衰調和振動子の量子化に対する新たな手法を提案する。この目標に向けて、本研究では、減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman ラグランジアンを提案する [8]。この章ではまず、修正された Bateman ラグランジアンに基づく解析力学を考察して、その後、考察した解析力学を用いることにより、減衰調和振動子の正準量子化を行う。過去の研究の手法とは異なり、本研究では修正された Bateman ラグランジアンから定まり、系の全エネルギーに対応する (保存する) ハミルトニアン演算子に加えて、減衰調和振動子に対する (保存しない) エネルギー演算子を考える。後に示すように、減衰調和振動子の古典的なエネルギーと同じく、減衰調和振動子のエネルギー固有値は実数であり、時間経過と共に指数関数的に減少する。また、エネルギー固有値の減少と共に、Schrödinger 方程式に従ってエネルギー固有状態間の遷移が起こることも示す。その際に、新たな臨界定数を基準として、時間発展に伴う遷移確率の振る舞いは 3 つの場合で異なることを指摘する。さらに、固有関数の振る舞いを反映して、確率密度の分散は時間経過と共に減少することも示す。

この章は以下のように構成される。第 3.2 節では、第 2 章で扱った Bateman ラグランジアンを参考にして、修正された Bateman ラグランジアンを構成する。第 3.3 節では、修正された Bateman ラグランジアンに基づき、Dirac の手法に従い正準形式を構成する。第 3.4 節では、構成した正準形式を基に、減衰調和振動子の量子化を行う。第 3.5 節では、前節で考察した内容を Schrödinger 描像で考える。第 3.6 節では、Schrödinger 方程式を解き、エネルギー固有状態間の遷移確率の時間変化を論じる。第 3.7 節では、本章のまとめを行い、今後の課題を述べる。第 3.8 節では、本研究で必要となる式の導出を行う。また、補足として、第 3.8.8 項では、減衰のない場合の遷移確率の時間変化を論じ、第 3.8.9 項では、断熱近似をした場合の波動関数について論じる。

3.2 修正された Bateman 模型

Bateman ラグランジアンに含まれる x, y 以外に変数 ρ, σ, ν を導入し, 式 (2.2.1) に新たな項を加えることで, 修正された Bateman ラグランジアンを

$$\begin{aligned} L_{\text{MB}} &= L_{\text{B}} - \frac{1}{2}(\rho\dot{\sigma} - \dot{\rho}\sigma) - \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma + \nu(\rho x - \sigma y) \\ &= m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy - \frac{1}{2}(\rho\dot{\sigma} - \dot{\rho}\sigma) - \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma + \nu(\rho x - \sigma y) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

のように構成する [8]. ここで, x, y, ρ, σ, ν は実数の力学変数である. また, m, γ, k は実定数である. 力学変数の上のドットは, 時刻 t に関する微分を表している. ラグランジアン (3.2.1) は, あらわに時間に依存しないことに注意する. 修正された Bateman 模型は式 (3.2.1) で定義される模型である.

式 (3.2.1) から, y, x, σ, ρ, ν に関する Euler-Lagrange 方程式はそれぞれ

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx + \nu\sigma = 0, \quad (3.2.2a)$$

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky - \nu\rho = 0, \quad (3.2.2b)$$

$$2m\dot{\rho} - \gamma\rho - 2m\nu y = 0, \quad (3.2.2c)$$

$$2m\dot{\sigma} + \gamma\sigma - 2m\nu x = 0, \quad (3.2.2d)$$

$$\rho x - \sigma y = 0 \quad (3.2.2e)$$

のように得られる.

力学変数 x と y は, 振動子の位置を表しているので, ほぼ全ての時刻 t で $x(t) \neq 0$ と $y(t) \neq 0$ が成り立つと仮定する. このとき, 式 (3.2.2e) からわかるように, $\rho(t) = 0$ の場合に $\sigma(t) = 0$ となり, $\sigma(t) = 0$ の場合に $\rho(t) = 0$ となる. 従って, $\rho(t) = \sigma(t) = 0$ の場合に, 式 (3.2.2c) と式 (3.2.2d) から $\nu(t) = 0$ となる. このため $\rho(t) = \sigma(t) = \nu(t) = 0$ の場合, 力学変数 x と y は完全に独立となり, 系は Bateman 振動子系に帰着する. 以上のことを考慮して, 以下では, $\rho(t) \neq 0$ かつ $\sigma(t) \neq 0$ の場合を考える.

いま, 式 (3.2.2e) を用いて, y を x, ρ, σ で表すと

$$y = \frac{\rho}{\sigma}x \quad (3.2.3)$$

となる. 式 (3.2.2c), 式 (3.2.2d), 式 (3.2.3) を用いると,

$$\dot{y} = (\dot{\rho}\sigma - \rho\dot{\sigma})\frac{1}{\sigma^2}x + \frac{\rho}{\sigma}\dot{x} = \frac{\gamma}{m}\rho\sigma\frac{1}{\sigma^2}x + \frac{\rho}{\sigma}\dot{x} = \frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{\gamma}{m}x + \dot{x}\right), \quad (3.2.4)$$

$$\ddot{y} = \frac{\gamma}{m}\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{\sigma}x\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho}{\sigma}\dot{x}\right) = \frac{\rho}{\sigma}\left(\frac{\gamma^2}{m^2}x + 2\frac{\gamma}{m}\dot{x} + \ddot{x}\right) \quad (3.2.5)$$

が得られる. 式 (3.2.3)~(3.2.5) を式 (3.2.2b) に代入すると

$$\rho \left\{ \frac{1}{\sigma} (m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx) - \nu \right\} = 0 \quad (3.2.6)$$

となる. いま $\rho \neq 0$ であるため, 式 (3.2.6) から,

$$\frac{1}{\sigma} (m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx) - \nu = 0 \quad (3.2.7)$$

が得られる. 式 (3.2.7) の両辺に σ を掛けることで

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx - \nu\sigma = 0 \quad (3.2.8)$$

となる. 式 (3.2.2a) と式 (3.2.8) を比べることで,

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\nu\sigma = 0 \quad (3.2.10)$$

が得られる. いま $\sigma \neq 0$ であるため, 式 (3.2.10) は

$$\nu = 0 \quad (3.2.11)$$

となる. 式 (3.2.11) を式 (3.2.2b)~(3.2.2d) に代入すると, それぞれ

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0, \quad (3.2.12a)$$

$$2m\dot{\rho} - \gamma\rho = 0, \quad (3.2.12b)$$

$$2m\dot{\sigma} + \gamma\sigma = 0 \quad (3.2.12c)$$

が得られる. 式 (3.2.9) は減衰調和振動子に対する運動方程式であり, 式 (3.2.12a) は増幅調和振動子に対する運動方程式である. 従って, ラグランジアン L_{MB} は減衰調和振動子と増幅調和振動子の運動方程式に加えて, $2m\dot{\rho} - \gamma\rho = 0$, $2m\dot{\sigma} + \gamma\sigma = 0$, $\rho x = \sigma y$, $\nu = 0$ を与えることがわかる.¹

式 (3.2.9), 式 (3.2.12a) ~ (3.2.12c) の一般解はそれぞれ

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\omega_- t + \alpha_1), \quad (3.2.13a)$$

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\omega_- t + \alpha_2), \quad (3.2.13b)$$

$$\rho(t) = \rho_0 e^{\frac{\gamma}{2m}t}, \quad (3.2.13c)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \quad (3.2.13d)$$

¹仮に x を独立変数とすると, y は $y = (\rho/\sigma)x$ で定まる従属変数となる.

である. ここで, x_0 と y_0 は正の実定数であり, 振動子の振幅を表し, α_1 と α_2 は実定数であり, 振動子の初期位相を表す. また, ρ_0 と σ_0 は 0 ではない実定数である. 条件 $\rho x = \sigma y$ に式 (3.2.13a)~(3.2.13d) を代入することで, x と y の初期位相は $2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) を法として等しいことが示される. 従って, この系において 1 つの振動項 $\sin(\omega_- t + \alpha_1)$ のみが存在することがわかる.

実際に式 (3.2.2e) に式 (3.2.13a)~(3.2.13d) を代入すると

$$\rho_0 x_0 \sin(\omega_- t + \alpha_1) = \sigma_0 y_0 \sin(\omega_- t + \alpha_2) \quad (3.2.14)$$

となる. 式 (3.2.14) を t で微分した後に, 両辺を ω_- で割ると

$$\rho_0 x_0 \cos(\omega_- t + \alpha_1) = \sigma_0 y_0 \cos(\omega_- t + \alpha_2) \quad (3.2.15)$$

が得られる. 式 (3.2.14) を式 (3.2.15) で割ると

$$\tan(\omega_- t + \alpha_1) = \tan(\omega_- t + \alpha_2) \quad (3.2.16)$$

となる. 式 (3.2.16) から, 関係式

$$\alpha_2 = \alpha_1 + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (3.2.17)$$

が成り立つことがわかる. 式 (3.2.17) を式 (3.2.14) に代入すると,

$$\rho_0 x_0 \sin(\omega_- t + \alpha_1) = \sigma_0 y_0 (-1)^l \sin(\omega_- t + \alpha_1) \quad (3.2.18)$$

となる. ここで, 関係式

$$\sin(\omega_- t + \alpha_1 + l\pi) = (-1)^l \sin(\omega_- t + \alpha_1) \quad (3.2.19)$$

を用いた.

いま, x_0 と y_0 が正の実数であることに加えて, 後に課す条件 $\rho_0 \sigma_0 = \rho \sigma = N > 0$ (式 (3.3.41) の下の文章を参照せよ.) から, 式 (3.2.18) の l は偶数のみ許される. 従って, 式 (3.2.17) は

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.2.20)$$

となる. 式 (3.2.20) を式 (3.2.13b) に代入すると,

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{\frac{\gamma}{2m} t} \sin(\omega_- t + \alpha_1 + 2n\pi) \\ &= y_0 e^{\frac{\gamma}{2m} t} \sin(\omega_- t + \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

となる.

式 (3.2.13a) と式 (3.2.21) から, x と y の初期位相は $2n\pi$ を法として等しいことがわかる.

3.3 正準形式

いま, L_{MB} に含まれる正準座標は $(x, y, \rho, \sigma, \nu)$ であり, それらに共役な正準運動量は L_{MB} から

$$p_x := \frac{\partial L_{\text{MB}}}{\partial \dot{x}} = m\dot{y} - \frac{\gamma}{2}y, \quad (3.3.1a)$$

$$p_y := \frac{\partial L_{\text{MB}}}{\partial \dot{y}} = m\dot{x} + \frac{\gamma}{2}x, \quad (3.3.1b)$$

$$p_\rho := \frac{\partial L_{\text{MB}}}{\partial \dot{\rho}} = \frac{1}{2}\sigma, \quad (3.3.1c)$$

$$p_\sigma := \frac{\partial L_{\text{MB}}}{\partial \dot{\sigma}} = -\frac{1}{2}\rho, \quad (3.3.1d)$$

$$p_\nu := \frac{\partial L_{\text{MB}}}{\partial \dot{\nu}} = 0 \quad (3.3.1e)$$

のように定義される. ラグランジアン L_{MB} の Legendre 変換として, 正準ハミルトニアンが

$$\begin{aligned} H_C &:= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_\rho \dot{\rho} + p_\sigma \dot{\sigma} + p_\nu \dot{\nu} - L_{\text{MB}} \\ &= \frac{1}{m}p_x p_y + \frac{\gamma}{2m}(y p_y - x p_x) + m\omega_-^2 x y + \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma - \nu(\rho x - \sigma y) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

のように得られる. ここで, $\omega_- := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/4m^2}$, $\omega := \sqrt{k/m}$ である. いま, 正準座標と正準運動量を用いて, Poisson 括弧を

$$\begin{aligned} \{A, B\} &:= \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial p_x} - \frac{\partial A}{\partial p_x} \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial p_y} - \frac{\partial A}{\partial p_y} \frac{\partial B}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \frac{\partial B}{\partial p_\rho} - \frac{\partial A}{\partial p_\rho} \frac{\partial B}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \sigma} \frac{\partial B}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial A}{\partial p_\sigma} \frac{\partial B}{\partial \sigma} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial A}{\partial \nu} \frac{\partial B}{\partial p_\nu} - \frac{\partial A}{\partial p_\nu} \frac{\partial B}{\partial \nu} \right) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

のように定義する. 式 (3.3.3) から, 正準座標と正準運動量の間 Poisson 括弧は

$$\{x, p_x\} = 1, \{y, p_y\} = 1, \{\rho, p_\rho\} = 1, \{\sigma, p_\sigma\} = 1, \{\nu, p_\nu\} = 1 \quad (3.3.4)$$

となり, その他の Poisson 括弧は 0 となる.

修正された Bateman ラグランジアン (3.2.1) で記述される系は式 (3.3.1c)~(3.3.1e) からわかるように拘束系となるため, 以下では Dirac の手法 [38–40] に従い正準形

式を構成する. 式 (3.3.1c)~(3.3.1e) は

$$\phi_1 := p_\rho - \frac{1}{2}\sigma \approx 0, \quad (3.3.5a)$$

$$\phi_2 := p_\sigma + \frac{1}{2}\rho \approx 0, \quad (3.3.5b)$$

$$\phi_\nu := p_\nu \approx 0 \quad (3.3.5c)$$

のような第一次拘束条件として扱われる. ここで, (\approx) は弱い等号を表している. 今後, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_ν を一次の拘束量と呼ぶ. 一次の拘束量の中の Poisson 括弧は, 式 (3.3.4) を用いることで

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -1 \quad (3.3.6)$$

となる. このとき, その他の Poisson 括弧は 0 となる. また, 一次の拘束量と正準ハミルトニアンの中の Poisson 括弧は

$$\{\phi_1, H_C\} = -\frac{\gamma}{2m}\sigma + \nu x, \quad \{\phi_2, H_C\} = -\frac{\gamma}{2m}\rho - \nu y, \quad \{\phi_\nu, H_C\} = x\rho - y\sigma \quad (3.3.7)$$

となる. いま, 正準ハミルトニアンと一次の拘束量を用いて, 全ハミルトニアンを

$$H := H_C + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_\nu\phi_\nu \quad (3.3.8)$$

と定義する. ここで, u_1, u_2, u_ν はそれぞれの拘束条件に対する Lagrange の未定係数であり, 一般に時間 t に依存する. 次に, 式 (3.3.6)~(3.3.8) を用いて, 一次の拘束量に対する時間発展を求める. このとき, 一次の拘束量は時間発展で変化しないという要請 (整合性の条件) により, 弱い等号 (\approx) を用いると, 一次の拘束量に対する時間発展は

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H\} \approx -\frac{\gamma}{2m}\sigma + \nu x - u_2 \approx 0, \quad (3.3.9a)$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} \approx -\frac{\gamma}{2m}\rho - \nu y + u_1 \approx 0, \quad (3.3.9b)$$

$$\dot{\phi}_\nu = \{\phi_\nu, H\} \approx x\rho - y\sigma \approx 0 \quad (3.3.9c)$$

となる. 式 (3.3.9b) と式 (3.3.9a) から, u_1 と u_2 が

$$u_1 = \frac{\gamma}{2m}\rho + \nu y, \quad (3.3.10a)$$

$$u_2 = -\frac{\gamma}{2m}\sigma + \nu x \quad (3.3.10b)$$

と定まる. 一方, 式 (3.3.9c) から, 新たな拘束条件 (第二次拘束条件) が

$$\chi := x\rho - y\sigma \approx 0 \quad (3.3.11)$$

のように課される. 今後, χ を二次の拘束量と呼ぶ. 二次の拘束量と一次の拘束量
の間の Poisson 括弧は

$$\{\chi, \phi_1\} = x, \{\chi, \phi_2\} = -y, \{\chi, \phi_\nu\} = 0 \quad (3.3.12)$$

のように得られる. また, 二次の拘束量と正準ハミルトニアンとの間の Poisson 括弧は

$$\{\chi, H_C\} = \frac{1}{m}(\rho p_y - \sigma p_x) - \frac{\gamma}{2m}(x\rho + y\sigma) \quad (3.3.13)$$

となる. 式 (3.3.12) と式 (3.3.13) を用いると, 二次の拘束量に対する時間発展は

$$\dot{\chi} = \{\chi, H\} \approx \frac{1}{m}(\rho p_y - \sigma p_x) \approx 0 \quad (3.3.14)$$

と求まる. 式 (3.3.14) から Lagrange の未定係数 u_ν が定まらないので, 新たな拘束
条件が

$$\psi := \rho p_y - \sigma p_x \approx 0 \quad (3.3.15)$$

のように課される.

いま, 式 (3.3.11) と式 (3.3.15) を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ p_y & -p_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \sigma \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.16)$$

となる. いま, ρ と σ はいずれも 0 ではないので, 式 (3.3.16) は逆行列を持たない.
従って,

$$xp_x - yp_y \approx 0 \quad (3.3.17)$$

が成り立つ.

拘束量 ψ と一次の拘束量との間の Poisson 括弧は

$$\{\psi, \phi_1\} = p_y, \{\psi, \phi_2\} = -p_x, \{\psi, \phi_\nu\} = 0 \quad (3.3.18)$$

のように得られる. また, 拘束量 ψ と正準ハミルトニアンとの間の Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} \{\psi, H_C\} &= -m\omega^2(x\rho - y\sigma) - \frac{\gamma}{2m}(p_y\rho + p_x\sigma) - 2\nu\rho\sigma \\ &\approx -\frac{\gamma}{2m}(p_y\rho + p_x\sigma) - 2\nu\rho\sigma \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

となる. ここで, 式 (3.3.11) を用いた. 式 (3.3.18) と式 (3.3.19) を用いると, 拘束量 ψ に対する時間発展は

$$\dot{\psi} = \{\psi, H\} \approx -2\nu\rho\sigma \approx 0 \quad (3.3.20)$$

と求まる. 式 (3.3.20) から Lagrange の未定係数 u_ν は定まらない. いま ρ と σ はいずれも 0 ではないので, 式 (3.3.20) から新たな拘束条件が

$$\Omega_1 := \nu \approx 0 \quad (3.3.21)$$

のように課される. 拘束量 Ω_1 と一次の拘束量の間 Poisson 括弧は

$$\{\Omega_1, \phi_1\} = 0, \{\Omega_1, \phi_2\} = 0, \{\Omega_1, \phi_\nu\} = 1 \quad (3.3.22)$$

のように得られる. また, 拘束量 Ω_1 と正準ハミルトニアンの間 Poisson 括弧は

$$\{\Omega_1, H_C\} = 0 \quad (3.3.23)$$

となる. 式 (3.3.22) と式 (3.3.23) を用いると, 拘束量 Ω_1 に対する時間発展が

$$\dot{\Omega}_1 = \{\Omega_1, H\} \approx u_\nu \approx 0 \quad (3.3.24)$$

と求まり, Lagrange の未定係数 u_ν が

$$u_\nu = 0 \quad (3.3.25)$$

と定まる. 以上のことから, 全ての Lagrange の未定係数が定まり, 新たな拘束条件は現れない. Lagrange の未定係数が全て定まったので, 拘束条件 ($\phi_1 \approx 0, \phi_2 \approx 0, \phi_\nu \approx 0, \chi \approx 0, \psi \approx 0, \Omega_1 \approx 0$) は第二類拘束条件であることがわかる. ついでながら, 拘束量 (χ, ψ, Ω_1) の間の Poisson 括弧は次のように得られる.

$$\{\chi, \psi\} = -2\rho\sigma, \{\chi, \Omega_1\} = 0, \{\psi, \Omega_1\} = 0. \quad (3.3.26)$$

また, 正準変数 ($x, y, p_x, p_y, \rho, \sigma, p_\rho, p_\sigma, \nu, p_\nu$) と拘束量 ($\phi_1, \phi_2, \phi_\nu, \chi, \psi, \Omega_1$) の間の

Poisson 括弧を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\{x, \psi\} &= -\sigma, & \{y, \psi\} &= \rho, \\
\{p_x, \chi\} &= -\rho, & \{p_y, \chi\} &= \sigma, \\
\{\rho, \phi_1\} &= 1, & \{\sigma, \phi_2\} &= 1, \\
\{p_\rho, \phi_2\} &= -\frac{1}{2}, & \{p_\sigma, \phi_1\} &= \frac{1}{2}, \\
\{p_\rho, \chi\} &= -x, & \{p_\sigma, \chi\} &= y, \\
\{p_\rho, \psi\} &= -p_y, & \{p_\sigma, \psi\} &= p_x, \\
\{\nu, \phi_\nu\} &= 1, & \{p_\nu, \Omega_1\} &= -1.
\end{aligned} \tag{3.3.27}$$

このとき、その他の Poisson 括弧は 0 となる。

いま、拘束量間の Poisson 括弧がより簡単になるように、新しく拘束条件 $\tilde{\chi}$ と $\tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\chi} := \chi - y\phi_1 - x\phi_2 \approx 0, \tag{3.3.28a}$$

$$\tilde{\psi} := \psi - p_x\phi_1 - p_y\phi_2 \approx 0 \tag{3.3.28b}$$

のように定義する。このとき、新しい拘束条件の全体 $(\phi_1, \phi_2, \phi_\nu, \tilde{\chi}, \tilde{\psi}, \Omega_1) \approx 0$ は元の拘束条件の全体 $(\phi_1, \phi_2, \phi_\nu, \chi, \psi, \Omega_1) \approx 0$ と同等である。このため、式 (3.3.28a) と式 (3.3.28b) は、それぞれ $\chi \approx 0$ と $\psi \approx 0$ に代わる拘束条件となる。式 (3.3.6)、式 (3.3.12)、式 (3.3.18)、式 (3.3.22)、式 (3.3.26)、式 (3.3.27) を用いると、拘束量 $(\phi_1, \phi_2, \phi_\nu, \Omega_1)$ と $(\tilde{\chi}, \tilde{\psi})$ の間の Poisson 括弧はすべて 0 になることがわかる。また、 $\tilde{\chi}$ と $\tilde{\psi}$ の間の Poisson 括弧は

$$\{\tilde{\chi}, \tilde{\psi}\} = -2\rho\sigma \tag{3.3.29}$$

となる。ここで、式 (3.3.17) を用いた。こうして、 $\tilde{\chi}$ と $\tilde{\psi}$ を用いて、拘束量間の Poisson 括弧を簡単にすることができた。ついでながら、正準変数 $(x, y, p_x, p_y, \rho, \sigma, p_\rho, p_\sigma, \nu, p_\nu)$ と拘束量 $(\tilde{\chi}, \tilde{\psi})$ との間の Poisson 括弧を計算すると、次のように

なる.

$$\begin{aligned}
\{p_x, \tilde{\chi}\} &= -\rho, & \{p_y, \tilde{\chi}\} &= \sigma, \\
\{\rho, \tilde{\chi}\} &= -y, & \{\sigma, \tilde{\chi}\} &= -x, \\
\{p_\rho, \tilde{\chi}\} &= -\frac{1}{2}x, & \{p_\sigma, \tilde{\chi}\} &= \frac{1}{2}y, \\
\{x, \tilde{\psi}\} &= -\sigma, & \{y, \tilde{\psi}\} &= \rho, \\
\{\rho, \tilde{\psi}\} &= -p_x, & \{\sigma, \tilde{\psi}\} &= -p_y, \\
\{p_\rho, \tilde{\psi}\} &= -\frac{1}{2}p_y, & \{p_\sigma, \tilde{\psi}\} &= \frac{1}{2}p_x.
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

このとき, その他の Poisson 括弧は 0 となる.

以下では, Dirac 括弧を定義することで, 第二類拘束条件を処理する. 初めに, 式 (3.3.6), 式 (3.3.22), 式 (3.3.29) から, 拘束量の間 Poisson 括弧を行列で表すと

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_\nu & \tilde{\chi} & \tilde{\psi} & \Omega_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_\nu \\ \tilde{\chi} \\ \tilde{\psi} \\ \Omega_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\rho\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\rho\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{3.3.31}$$

となる. 式 (3.3.31) には逆行列 A^{-1} が存在し

$$A^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_\nu & \tilde{\chi} & \tilde{\psi} & \Omega_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_\nu \\ \tilde{\chi} \\ \tilde{\psi} \\ \Omega_1 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\rho\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{3.3.32}$$

である。従って、Dirac 括弧は

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_D &= \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} - \{\mathcal{F}, \phi_1\} \{\phi_2, \mathcal{G}\} + \{\mathcal{F}, \phi_2\} \{\phi_1, \mathcal{G}\} \\
&\quad - \{\mathcal{F}, \phi_\nu\} \{\Omega_1, \mathcal{G}\} + \{\mathcal{F}, \Omega_1\} \{\phi_\nu, \mathcal{G}\} \\
&\quad - \frac{1}{2\rho\sigma} \{\mathcal{F}, \tilde{\chi}\} \{\tilde{\psi}, \mathcal{G}\} + \frac{1}{2\rho\sigma} \{\mathcal{F}, \tilde{\psi}\} \{\tilde{\chi}, \mathcal{G}\} \quad (3.3.33)
\end{aligned}$$

と定義される。ただし、 \mathcal{F} と \mathcal{G} は正準座標および正準運動量を引数に持つ任意の関数である。実際に、式 (3.3.33)、式 (3.3.27)、式 (3.3.30) を用いて、正準変数 $(x, y, p_x, p_y, \rho, \sigma, p_\rho, p_\sigma, \nu, p_\nu)$ の間の Dirac 括弧を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\{x, p_x\}_D &= \frac{1}{2}, & \{x, p_y\}_D &= \frac{\sigma}{2\rho}, & \{x, \rho\}_D &= -\frac{y}{2\rho}, \\
\{x, \sigma\}_D &= -\frac{x}{2\rho}, & \{x, p_\rho\}_D &= -\frac{x}{4\rho}, & \{x, p_\sigma\}_D &= \frac{y}{4\rho}, \\
\{y, p_x\}_D &= \frac{\rho}{2\sigma}, & \{y, p_y\}_D &= \frac{1}{2}, & \{y, \rho\}_D &= \frac{y}{2\sigma}, \\
\{y, \sigma\}_D &= \frac{x}{2\sigma}, & \{y, p_\rho\}_D &= \frac{x}{4\sigma}, & \{y, p_\sigma\}_D &= -\frac{y}{4\sigma}, \\
\{p_x, \rho\}_D &= \frac{p_x}{2\sigma}, & \{p_x, \sigma\}_D &= \frac{p_y}{2\sigma}, & \{p_x, p_\rho\}_D &= \frac{p_y}{4\sigma}, \\
\{p_x, p_\sigma\}_D &= -\frac{p_x}{4\sigma}, & \{p_y, \rho\}_D &= -\frac{p_x}{2\rho}, & \{p_y, \sigma\}_D &= -\frac{p_y}{2\rho}, \\
\{p_y, p_\rho\}_D &= -\frac{p_y}{4\rho}, & \{p_y, p_\sigma\}_D &= \frac{p_x}{4\rho}, & \{\rho, \sigma\}_D &= 1, \\
\{\rho, p_\rho\}_D &= \frac{1}{2}, & \{\sigma, p_\sigma\}_D &= \frac{1}{2}, & \{p_\rho, p_\sigma\}_D &= \frac{1}{4}. \quad (3.3.34)
\end{aligned}$$

ここで、その他の Dirac 括弧は 0 である。任意の関数 \mathcal{F} と第二類拘束条件との間の Dirac 括弧は恒等的に 0 となるため、Dirac 括弧のもとで第二類拘束条件は全て強い等号 (=) で 0 になる。従って、式 (3.3.5)、式 (3.3.11)、式 (3.3.15)、式 (3.3.21)、式 (3.3.28) から

$$\begin{aligned}
x\rho - y\sigma &= 0, & \rho p_y - \sigma p_x &= 0, & \nu &= 0, \\
p_\rho - \frac{1}{2}\sigma &= 0, & p_\sigma + \frac{1}{2}\rho &= 0, & p_\nu &= 0 \quad (3.3.35)
\end{aligned}$$

が成り立つ。拘束系に対する Dirac の手法に従うことにより、10 個の正準変数 $(x, y, p_x, p_y, \rho, \sigma, p_\rho, p_\sigma, \nu, p_\nu)$ に対して 6 個の拘束条件が得られた。実際に、式 (3.3.35) から、独立な正準変数は 4 個であることがわかる。幾つかの選択肢の中から、減衰調和振動子を記述するために、独立変数として (x, p_x, ρ, σ) を選ぶ。このと

き, 従属変数 $(y, p_y, p_\rho, p_\sigma)$ は

$$y = \frac{\rho}{\sigma}x, p_y = \frac{\sigma}{\rho}p_x, p_\rho = \frac{1}{2}\sigma, p_\sigma = -\frac{1}{2}\rho \quad (3.3.36)$$

と書ける. 式 (3.3.35) と式 (3.3.36) を用いると, Dirac 括弧 (3.3.34) は

$$\begin{aligned} \{x, p_x\}_D &= \frac{1}{2}, & \{x, \rho\}_D &= -\frac{x}{2\sigma}, & \{x, \sigma\}_D &= -\frac{x}{2\rho}, \\ \{p_x, \rho\}_D &= \frac{p_x}{2\sigma}, & \{p_x, \sigma\}_D &= \frac{p_x}{2\rho}, & \{\rho, \sigma\}_D &= 1 \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

となり, 全ハミルトニアン (3.3.8) は

$$H = \frac{1}{m} \frac{\sigma}{\rho} p_x^2 + m\omega_-^2 \frac{\rho}{\sigma} x^2 + \frac{\gamma}{2m} \rho\sigma \quad (3.3.38)$$

と求まる.

次に, 新たな正準変数

$$X := \sqrt{2}x, P := \sqrt{2}p_x, \theta := \frac{1}{2} \ln \frac{\rho}{\sigma}, N := \rho\sigma \quad (3.3.39)$$

を定義して, 変数変換を行う. このとき, Dirac 括弧 (3.3.37) は

$$\{X, P\}_D = 1, \{X, N\}_D = -X, \{P, N\}_D = P, \{\theta, N\}_D = 1 \quad (3.3.40)$$

となり, その他の Dirac 括弧は 0 となる. また, 全ハミルトニアン (3.3.38) は

$$H = \frac{1}{2m} e^{-2\theta} P^2 + \frac{1}{2} m\omega_-^2 e^{2\theta} X^2 + \frac{\gamma}{2m} N \quad (3.3.41)$$

と書き換えられる.² いま, 全ハミルトニアン H が正定値となるように, $N (= \rho\sigma)$ が正の実数であると仮定する. このとき, θ は実数となる. また, 初期条件 $\theta_0 = 0$ ($\theta_0 := \theta(0)$) を課す. この条件は, $\gamma = 0$ のときに H が通常の単純な調和振動子のハミルトニアン $H_0 := (1/2m)P^2 + (m\omega_-^2/2)X^2$ に帰着するために要請される. Caldirola-Kanai ハミルトニアン [1, 2, 11] とは異なり, H はあらわに時間に依存しない. このため, H は保存量であることがわかる.

式 (3.3.40) と式 (3.3.41) を用いると, Hamilton の正準方程式が次のように得られ

²式 (3.3.41) の逆 Legendre 変換によって, 力学変数 $(X, \theta, \dot{X}, \dot{\theta})$ で表されるラグランジアンが導かれる.

る.³

$$\dot{X} = \{X, H\}_D = \frac{1}{m} \left(e^{-2\theta} P - \frac{\gamma}{2} X \right), \quad (3.3.42a)$$

$$\dot{P} = \{P, H\}_D = -m\omega_-^2 e^{2\theta} X + \frac{\gamma}{2m} P, \quad (3.3.42b)$$

$$\dot{\theta} = \{\theta, H\}_D = \frac{\gamma}{2m}, \quad (3.3.42c)$$

$$\dot{N} = \{N, H\}_D = 0. \quad (3.3.42d)$$

式 (3.3.42c) と式 (3.3.42d) から, θ と N が

$$\theta = \frac{\gamma}{2m} t, \quad (3.3.43a)$$

$$N = N_0 \quad (3.3.43b)$$

のように求まる. ここで, 条件 $\theta_0 = 0$ を用いた. また, N_0 は正の実定数である.

いま, 式 (3.3.42) を用いて, H を (X, \dot{X}, θ, N) で表すと

$$H = e^{2\theta} \left(\frac{m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m\omega_-^2}{2} X^2 \right) + \frac{\gamma}{2} e^{2\theta} X \dot{X} + \frac{\gamma}{2m} N \quad (3.3.44)$$

となる. このとき, 式 (3.3.44) を $H = E + Q$ のように, 調和振動子の力学的エネルギー E とその他の部分 Q に分ける.

$$E := \frac{m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m\omega_-^2}{2} X^2, \quad (3.3.45a)$$

$$Q := (e^{2\theta} - 1) \left(\frac{m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m\omega_-^2}{2} X^2 \right) + \frac{\gamma}{2} e^{2\theta} X \dot{X} + \frac{\gamma}{2m} N. \quad (3.3.45b)$$

一方で, x に対する減衰調和振動子の運動方程式 (3.2.9) を $X = \sqrt{2}x$ を用いて書いた $m\ddot{X} + \gamma\dot{X} + kX = 0$ の両辺に \dot{X} を掛けて, t で積分すると, エネルギー積分は次のように求まる.

$$\frac{m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m\omega_-^2}{2} X^2 + \gamma \int \dot{X}^2 dt = \text{constant}. \quad (3.3.46)$$

式 (3.3.46) の左辺に注目すると, 第1項と第2項の和は減衰調和振動子の力学的エネルギー E であり, 第3項は減衰振動によって生じる熱エネルギーを表すことがわかる. 一般解 $X = X_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\omega_- t + \alpha_1)$, $\theta = \frac{\gamma}{2m}t$, $N = N_0$ を式 (3.3.45b) と $\gamma \int \dot{X}^2 dt$ に代入することで, $Q (= H - E) = \gamma \int \dot{X}^2 dt$ が成り立つことが確かめら

³実際に, 式 (3.3.42) から, X で書かれた減衰調和振動子の運動方程式 $m\ddot{X} + \gamma\dot{X} + kX = 0$ が導かれる. また, $dH/dt = 0$ であることが確かめられる.

れる.⁴ このように, Q は系において生じる熱エネルギーとして理解される. 以上のことから, 全ハミルトニアン H は減衰調和振動子の力学的エネルギー E と発生する熱エネルギー Q の2つに分解できて, 系の全エネルギー (保存量) を表すことがわかる.

減衰調和振動子の力学的エネルギーについての考察

式 (3.3.45a) に一般解 $X = X_0 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\omega_- t + \alpha_1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m\omega^2}{2} X^2 \\ &= \frac{X_0^2}{8m} e^{-\frac{\gamma}{m}t} \{4m^2\omega^2 - \gamma^2 \cos 2(\omega_- t + \alpha_1) - 2m\gamma\omega_- \sin 2(\omega_- t + \alpha_1)\} \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

となる. 図 (1a), 図 (1b), 図 (1c) はそれぞれ, 固定された値 $m = 10$, $\omega = 1$, $\gamma = 5$, $X_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ に対する $E(t)$, $V(t)$, $X(t)$ のグラフを表している. ここで, $V(t)$ は $V(t) := \dot{X}(t)$ と定義され, 速度を表している. 減衰調和振動子の力学的エネルギーは, 主に運動エネルギー $m\dot{X}^2/2$ に起因して減少することがわかる. このことは, エネルギーの散逸は速度と密接に関係していることを意味している. 速度が小さい時には, エネルギーの散逸は小さくなり, 特に速度が0の時にはエネルギーの散逸は全く起こらないことがわかる [36]. 実際に, 式 (3.3.47) の両辺を t で微分することで

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma (\dot{X})^2 \quad (3.3.48)$$

が成り立つことを確認できる.

減衰調和振動子の力学的エネルギー (3.3.45a) は式 (3.3.42a) を用いることにより

$$E = \frac{1}{2m} \left(e^{-2\theta} P - \frac{\gamma}{2} X \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \quad (3.3.49)$$

⁴実際に, 一般解を代入して, 計算を行うと次のようになる.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{X_0^2}{8m} e^{-\frac{\gamma}{m}t} \{-4m^2\omega^2 + \gamma^2 \cos 2(\omega_- t + \alpha_1) + 2m\gamma\omega_- \sin 2(\omega_- t + \alpha_1)\} \\ &\quad + \frac{X_0^2}{8m} (4m^2\omega^2 - \gamma^2) + \frac{\gamma}{2m} N_0, \\ \int \gamma \dot{X}^2 dt &= \frac{X_0^2}{8m} e^{-\frac{\gamma}{m}t} \{-4m^2\omega^2 + \gamma^2 \cos 2(\omega_- t + \alpha_1) + 2m\gamma\omega_- \sin 2(\omega_- t + \alpha_1)\} + C. \end{aligned}$$

ここで, C は積分定数である. 積分定数 C を適切に選ぶことにより, 両者が一致することが確かめられる. また, Q は $\gamma = 0$ のときに $Q = 0$ となることがわかる.

のような正準変数で表される. 式 (3.3.40), 式 (3.3.41), 式 (3.3.49), 式 (3.3.42a) と関係式

$$\{N, e^{-2\theta}\}_D = 2e^{-2\theta} \quad \{N, e^{-4\theta}\}_D = 4e^{-4\theta} \quad (3.3.50)$$

を用いることで,

$$\begin{aligned} \dot{E} = \{E, H\}_D &= -\gamma \left(\frac{1}{m} e^{-2\theta} P - \frac{\gamma}{2m} X \right)^2 \\ &= -\gamma (\dot{X})^2 \end{aligned} \quad (3.3.51)$$

が得られる. 式 (3.3.51) は式 (3.3.48) と一致することが確かめられる.

式 (3.3.49) は $\gamma = 0$ のときに, 調和振動子のハミルトニアン H_0 と一致する. このため, $\gamma = 0$ のときに $H = E = H_0$ が成り立つことがわかる.

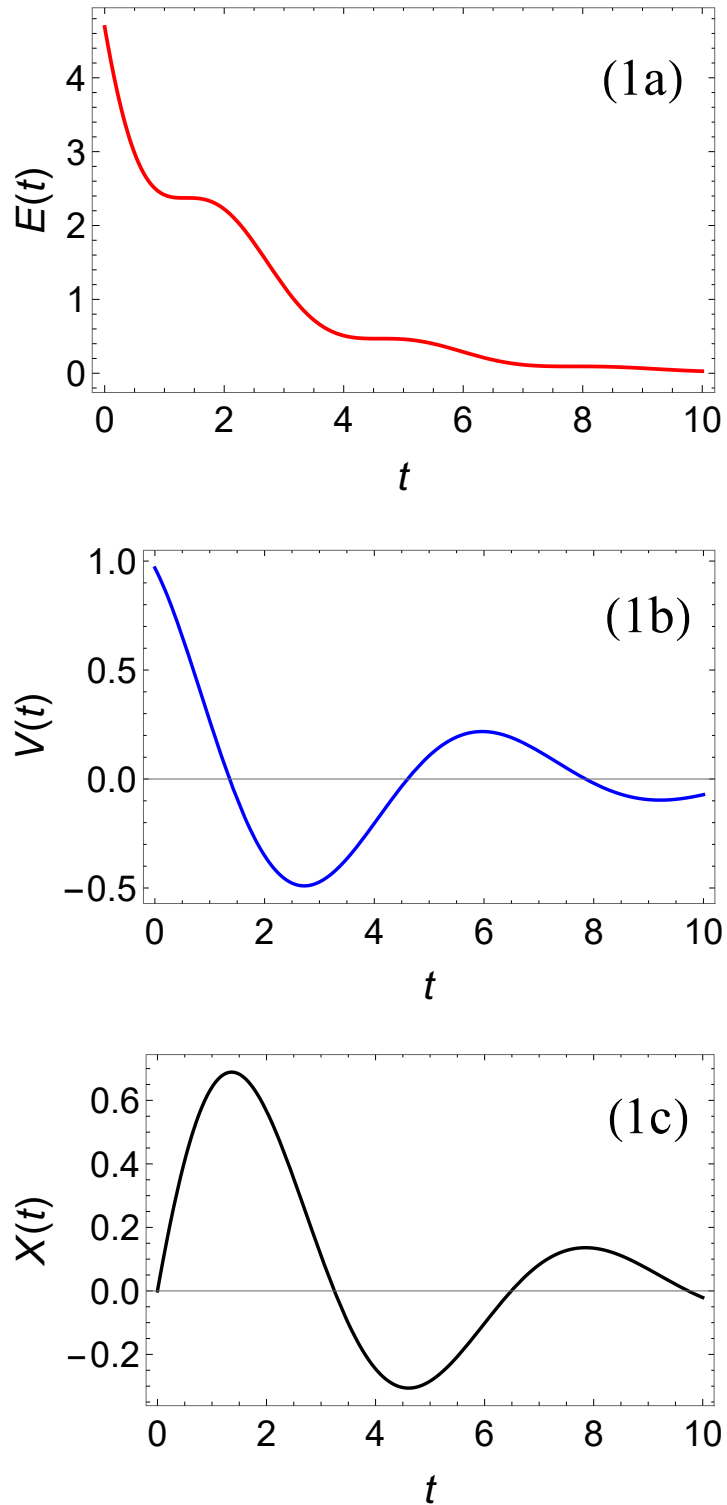


図 3.1: 図 (1a), 図 (1b), 図 (1c) はそれぞれ, 固定された値 $m = 10$, $\omega = 1$, $\gamma = 5$, $X_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$ に対する $E(t)$, $V(t)$, $X(t)$ のグラフを表している.

3.4 正準量子化

次に, 正準変数 X, P, θ, N を対応する Hermite 演算子 $\hat{X}, \hat{P}, \hat{\theta}, \hat{N}$ にそれぞれ置き換えて, Dirac 括弧 (3.3.40) を $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}_D \mathbb{1}$ に従う交換関係に置くことにより, 減衰調和振動子の正準量子化を行う. ここで, $\mathbb{1}$ は恒等演算子を表す. このとき, 交換関係は

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{1}, [\hat{X}, \hat{N}] = -i\hbar\hat{X}, [\hat{P}, \hat{N}] = i\hbar\hat{P}, [\hat{\theta}, \hat{N}] = i\hbar\mathbb{1} \quad (3.4.1)$$

となり, その他の交換関係は 0 となる. また, 式 (3.3.41) と 式 (3.3.49) から, 正準変数を演算子に置き換えて Weyl 順序をとり, 式 (3.4.1) を用いることで, ハミルトニアン演算子 \hat{H} とエネルギー演算子 \hat{E} が次のように定まる.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}e^{-2\hat{\theta}}\hat{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2e^{2\hat{\theta}}\hat{X}^2 + \frac{\gamma}{2m}\hat{N}, \quad (3.4.2)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2m}\left(e^{-2\hat{\theta}}\hat{P} - \frac{\gamma}{2}\hat{X}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2. \quad (3.4.3)$$

明らかに, 演算子 \hat{H} と \hat{E} は Hermite 演算子である. また, 式 (3.4.1) を用いることで, $[\hat{H}, \hat{E}] \neq 0$ が確かめられて, 期待通りに \hat{E} は保存量ではないことがわかる.

式 (3.4.1) と 式 (3.4.2) を用いると, Heisenberg 方程式が

$$i\hbar\frac{d\hat{X}}{dt} = [\hat{X}, \hat{H}] = i\hbar\frac{1}{m}\left(e^{-2\hat{\theta}}\hat{P} - \frac{\gamma}{2}\hat{X}\right), \quad (3.4.4a)$$

$$i\hbar\frac{d\hat{P}}{dt} = [\hat{P}, \hat{H}] = i\hbar\left(-m\omega^2e^{2\hat{\theta}}\hat{X} + \frac{\gamma}{2m}\hat{P}\right), \quad (3.4.4b)$$

$$i\hbar\frac{d\hat{\theta}}{dt} = [\hat{\theta}, \hat{H}] = i\hbar\frac{\gamma}{2m}\mathbb{1}, \quad (3.4.4c)$$

$$i\hbar\frac{d\hat{N}}{dt} = [\hat{N}, \hat{H}] = 0 \quad (3.4.4d)$$

のように得られる。⁵ 式 (3.4.4c) と式 (3.4.4d) の解はそれぞれ

$$\hat{\theta}(t) = \frac{\gamma}{2m}t\mathbb{1} + \hat{\theta}_0, \quad (3.4.5a)$$

$$\hat{N}(t) = \hat{N}_0 \quad (3.4.5b)$$

のように求まる。ここで、 $\hat{\theta}_0$ と \hat{N}_0 は、 $[\hat{\theta}_0, \hat{N}_0] = i\hbar\mathbb{1}$ を満たす時間依存しない演算子である。

いま、新しく演算子 \hat{a} とその Hermite 共役 \hat{a}^\dagger を

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}}\Xi^*e^{\hat{\theta}}\hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}}\Xi e^{-\hat{\theta}}\hat{P}, \quad (3.4.6a)$$

$$\hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}}\Xi e^{\hat{\theta}}\hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}}\Xi^*e^{-\hat{\theta}}\hat{P} \quad (3.4.6b)$$

のように定義する。ここで、 Ξ と ω_+ は

$$\Xi := \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\omega_+}{\omega}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\omega_+}{\omega}\right)}, \quad (3.4.7a)$$

$$\omega_+ := \sqrt{\omega^2 + \frac{\gamma^2}{4m^2}} \quad (3.4.7b)$$

⁵実際に、式 (3.4.1)~(3.4.3) を用いて \hat{H} と \hat{E} の交換関係を計算する。関係式

$$[\hat{N}, e^{-2\hat{\theta}}] = 2i\hbar e^{-2\hat{\theta}}, \quad [\hat{N}, e^{-4\hat{\theta}}] = 4i\hbar e^{-4\hat{\theta}}$$

を用いると、 \hat{H} と \hat{E} の交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{E}] &= i\hbar\gamma \left\{ \frac{1}{m^2}e^{-4\hat{\theta}}\hat{P}^2 + \frac{\gamma^2}{4m^2}\hat{X}^2 - \frac{\gamma}{2m^2}e^{-2\hat{\theta}}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) \right\} \\ &= i\hbar\gamma \left(\frac{1}{m}e^{-2\hat{\theta}}\hat{P} - \frac{\gamma}{2m}\hat{X} \right)^2 \end{aligned}$$

となり、式 (3.4.4a) を用いることで、

$$[\hat{H}, \hat{E}] = i\hbar\gamma \left(\frac{d\hat{X}}{dt} \right)^2$$

となる。従って、

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{E}, \hat{H}] = -\gamma \left(\frac{d\hat{X}}{dt} \right)^2$$

が成り立つことがわかる。

と定義される. このとき, 式 (3.4.1), 式 (3.4.5a), 式 (3.4.6) を用いると

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \mathbb{1}, \quad (3.4.8a)$$

$$[\hat{a}, \hat{\theta}_0] = [\hat{a}^\dagger, \hat{\theta}_0] = 0 \quad (3.4.8b)$$

が示される.

次に, 新しく演算子 \hat{N}' を

$$\hat{N}' := \hat{N} + \frac{1}{2}(\hat{X}\hat{P} + \hat{P}\hat{X}) \quad (3.4.9)$$

のように定義する. 式 (3.4.1) と式 (3.4.9) から, 演算子 $(\hat{X}, \hat{P}, \hat{\theta}, \hat{N}')$ に対する 0 ではない交換関係は $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{1}$ と $[\hat{\theta}, \hat{N}'] = i\hbar\mathbb{1}$ のみである. 従って, $\hat{\theta}$ に対する正準共役演算子は, \hat{N} ではなくて \hat{N}' であることがわかる. また, 式 (3.4.5) から, $[\hat{\theta}_0, \hat{N}'_0] = i\hbar\mathbb{1}$ が成り立つ. ここで, \hat{N}'_0 は $\hat{N}'_0 := \hat{N}'(0)$ と定義される.

式 (3.4.6) と式 (3.4.9) を用いて, ハミルトニアン演算子 (3.4.2) を $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hat{N}')$ で表すと

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_-^2}{\omega} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) - \frac{\hbar\gamma^2}{8m^2\omega_+} \left\{ \left(1 - \frac{i\gamma}{2m\omega} \right) \hat{a}^2 + \left(1 + \frac{i\gamma}{2m\omega} \right) \hat{a}^{\dagger 2} \right\} + \frac{\gamma}{2m} \hat{N}' \quad (3.4.10)$$

のように書かれる. また, 式 (3.4.5a), 式 (3.4.6), 式 (3.4.8a) を用いると, エネルギー演算子 (3.4.3) は

$$\hat{E} = \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}(t)} \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) \quad (3.4.11)$$

のように書ける.

いま, 真空状態ベクトル $|0, t\rangle$ を

$$\hat{a}(t)|0, t\rangle = 0, \quad (3.4.12a)$$

$$\hat{\theta}_0|0, t\rangle = 0 \quad (3.4.12b)$$

のように定義する. 式 (3.4.8a) と式 (3.4.12a) から, $\hat{a}(t)$ は消滅演算子, $\hat{a}^\dagger(t)$ は生成演算子であることがわかる. 式 (3.4.11) が $\gamma = 0$ の場合に単純な調和振動子系に帰着するために, 式 (3.4.12b) は要請される. Fock 基底ベクトルは

$$|n, t\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger(t))^n |0, t\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.4.13)$$

のように構成される。ここで、規格化条件 $\langle 0, t | 0, t \rangle = 1$ を課す。⁶ 式 (3.4.8a) と式 (3.4.12a) を用いると

$$\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|n, t\rangle = n|n, t\rangle \quad (3.4.14)$$

となる。また、式 (3.4.8b) と式 (3.4.13) から

$$\hat{\theta}_0|n, t\rangle = 0 \quad (3.4.15)$$

であることがわかる。さらに、式 (3.4.5a) から

$$\hat{\theta}(t)|n, t\rangle = \frac{\gamma}{2m}t|n, t\rangle \quad (3.4.16)$$

が導かれる。

エネルギー固有値方程式は

$$\hat{E}|n, t\rangle = E_n|n, t\rangle \quad (3.4.17)$$

のように与えられる。式 (3.4.11)、式 (3.4.14)、式 (3.4.16) を用いると、エネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega e^{-\frac{\gamma}{m}t} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.4.18)$$

のように得られる。各時刻 t において等間隔のエネルギー分布を維持しながら、すべてのエネルギー固有値は、時間経過と共に指数関数的に減少して、最終的に $t \rightarrow \infty$ の極限において 0 になる。(図 3.2 を参照せよ。) 式 (3.3.47) からわかるように、減衰調和振動子の古典的なエネルギーも同様に $e^{-\gamma t/m}$ に比例している。図 3.1 の図 (1a) で示した通り、古典的なエネルギーは一様に減少しない。この古典的なエネルギーとは異なり、式 (3.4.18) は、時間経過と共に滑らかに減少する。以前の減衰調和振動子の量子化に関する文献において、式 (3.4.18) は知られてこなかったものである。⁷

⁶式 (3.4.12) と式 (3.4.13) の双対形式は、それぞれ

$$\begin{aligned} \langle 0, t | \hat{a}^\dagger(t) &= 0, \\ \langle 0, t | \hat{\theta}_0 &= 0, \\ \langle n, t | &:= \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle 0, t | (\hat{a}(t))^n \end{aligned}$$

である。

⁷似た数式 $\hbar(\omega^2/\omega_-)e^{-\gamma t/m}(n+1/2)$ は減衰調和振動子のエネルギー期待値として得られている [34–37]。しかしながら、この数式は臨界減衰の極限 $\omega_- \rightarrow 0$ において、発散するように振る舞う。



図 3.2: 時間発展の下でのエネルギー固有値 E_n の指数関数的な減少の模式図

3.5 Schrödinger 描像

時間発展演算子は $\hat{U} = \exp[-i\hat{H}t/\hbar]$ によって与えられる。ここで、 \hat{H} は保存量 ($d\hat{H}/dt = 0$) であるため、 $\hat{H}(0)$ として理解できる。また、 \hat{H} は Hermite 演算子であり、従って $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$ を満たし、 \hat{U} はユニタリー演算子であることがわかる。次に、 $\hat{X}_S = \hat{U}\hat{X}\hat{U}^\dagger$ と $\hat{P}_S = \hat{U}\hat{P}\hat{U}^\dagger$ によって、Schrödinger 描像における時間に依存しない演算子 \hat{X}_S と \hat{P}_S を定義する [33]。このとき、 $\hat{\theta}_0 = \hat{U}\hat{\theta}\hat{U}^\dagger$ 、 $\hat{N}'_0 = \hat{U}\hat{N}'\hat{U}^\dagger$ が成り立つ。演算子 ($\hat{X}_S, \hat{P}_S, \hat{\theta}_0, \hat{N}'_0$) の間の交換関係は

$$[\hat{X}_S, \hat{P}_S] = i\hbar\mathbb{1}, \quad [\hat{\theta}_0, \hat{N}'_0] = i\hbar\mathbb{1} \quad (3.5.1)$$

となる。ここで、その他の交換関係は 0 となる。次に、Schrödinger 描像における Fock 基底ベクトルを

$$|n, t\rangle_S := \hat{U}|n, t\rangle \quad (3.5.2)$$

のように定義する。式 (3.4.16) の両辺に左から \hat{U} を掛けて、式 (3.5.2) を用いると

$$\hat{\theta}_0|n, t\rangle_S = \frac{\gamma}{2m}t|n, t\rangle_S \quad (3.5.3)$$

が得られる。Schrödinger 描像において、 $2m\hat{\theta}_0/\gamma$ は時間演算子として振る舞うことがわかる。いま、古典的な段階における条件 $N_0 > 0$ が引き継がれるように、 \hat{N}'_0 の固有値は正であると仮定する。この \hat{N}'_0 とは異なり、正準共役演算子 $\hat{N}'_0 := \hat{N}'(0)$

は下限も上限もない固有値を持つことができるため、演算子 \hat{N}'_0 は明確に定義される。式 (3.5.1) と式 (3.5.3) を組み合わせることにより、

$${}_S\langle n, t | \hat{N}'_0 = -i\hbar \frac{2m}{\gamma} \frac{d}{dt} {}_S\langle n, t | \quad (3.5.4)$$

が導かれる。

いま、あらわに時間に依存する演算子 $\hat{a}_S(t)$ とその Hermite 共役 $\hat{a}_S^\dagger(t)$ を

$$\hat{a}_S(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Xi^* e^{\frac{\gamma}{2m}t} \hat{X}_S + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}} \Xi e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \hat{P}_S, \quad (3.5.5a)$$

$$\hat{a}_S^\dagger(t) := \sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Xi e^{\frac{\gamma}{2m}t} \hat{X}_S - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}} \Xi^* e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \hat{P}_S \quad (3.5.5b)$$

のように定義する。式 (3.5.5) と式 (3.5.1) から

$$[\hat{a}_S(t), \hat{a}_S^\dagger(t)] = \mathbf{1}, \quad (3.5.6a)$$

$$[\hat{a}_S(t), \hat{\theta}_0] = [\hat{a}_S^\dagger(t), \hat{\theta}_0] = 0 \quad (3.5.6b)$$

が得られる。ここで、式 (3.5.3) を用いることにより、

$$\hat{a}(0)|n, t\rangle_S = \hat{a}_S(t)|n, t\rangle_S, \quad (3.5.7a)$$

$$\hat{a}^\dagger(0)|n, t\rangle_S = \hat{a}_S^\dagger(t)|n, t\rangle_S \quad (3.5.7b)$$

が示される。さらに、関係式

$$[\hat{a}(0), \hat{a}_S^\dagger(t)] = \frac{1}{2} \left(\Xi^{*2} e^{-\frac{\gamma}{2m}t} e^{\hat{\theta}_0} + \Xi^2 e^{\frac{\gamma}{2m}t} e^{-\hat{\theta}_0} \right), \quad (3.5.8a)$$

$$[\hat{a}(0), \hat{a}_S(t)] = -\frac{\omega_+}{\omega} \sinh \left(\hat{\theta}_0 - \frac{\gamma}{2m} t \mathbf{1} \right) \quad (3.5.8b)$$

と式 (3.5.6a), 式 (3.5.7) を用いることで

$$\hat{a}^\dagger(0)\hat{a}(0)|n, t\rangle_S = \hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t)|n, t\rangle_S, \quad (3.5.9a)$$

$$\hat{a}^l(0)|n, t\rangle_S = \hat{a}_S^l(t)|n, t\rangle_S, \quad (3.5.9b)$$

$$\hat{a}^{\dagger l}(0)|n, t\rangle_S = \hat{a}_S^{\dagger l}(t)|n, t\rangle_S \quad (3.5.9c)$$

が示される。ここで、 l は自然数とする。

関係式 $\hat{a}(0) = \hat{U}\hat{a}(t)\hat{U}^\dagger$ に注意すると、式 (3.4.13), 式 (3.5.2), 式 (3.5.9c) を用いて

$$|n, t\rangle_S = (1/\sqrt{n!}) (\hat{a}_S^\dagger(t))^n |0, t\rangle_S, \quad (3.5.10)$$

が得られ, 式 (3.4.12a), 式 (3.5.2), 式 (3.5.7a) を用いて

$$\hat{a}_S(t)|0, t\rangle_S = 0 \quad (3.5.11)$$

が得られる.

式 (3.5.6a) と式 (3.5.11) を用いると

$$\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t)|n, t\rangle_S = n|n, t\rangle_S \quad (3.5.12)$$

となる.

いま, Schrödinger 描像におけるエネルギー演算子を

$$\hat{E}_S(t) := \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}_0} \left(\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \frac{1}{2}\mathbf{1} \right) \quad (3.5.13)$$

のように定義する. エネルギー演算子 $\hat{E}_S(t)$ は 式 (3.4.11) における \hat{a} , \hat{a}^\dagger , $\hat{\theta}(t)$ をそれぞれ $\hat{a}_S(t)$, $\hat{a}_S^\dagger(t)$, $\hat{\theta}_0$ に置き換えたものにより定義される. エネルギー固有値方程式は

$$\hat{E}_S(t)|n, t\rangle_S = E_n|n, t\rangle_S \quad (3.5.14)$$

のように与えられる. 式 (3.5.3) と式 (3.5.12) を用いると, エネルギー固有値 (3.4.18) が得られる. Schrödinger 描像においても同様に, エネルギー固有値 E_n が得られることが確認できる.

エネルギー固有値 E_n に対応するエネルギー固有関数は, 以下のように得られる. (式の導出に関しては, 第 3.8.1 項を参照せよ.)

$$\begin{aligned} \phi_n(X, t) &:= \langle X|n, t\rangle_S \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega - i\frac{\gamma}{2m}}{\omega + i\frac{\gamma}{2m}} \right)^{\frac{n}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{\frac{\gamma}{2m}t} X \right) \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\gamma}{4m}t - \frac{m}{2\hbar} \left(\omega - i\frac{\gamma}{2m} \right) e^{\frac{\gamma}{m}t} X^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

ここで, H_n は n 次の Hermite 多項式を表している. Hermite 多項式の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(\mu) H_n(\mu) e^{-\mu^2} d\mu = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn} \quad (3.5.16)$$

を用いることで,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^*(X, t) \phi_{n'}(X, t) dX = \delta_{nn'} \quad (3.5.17)$$

を確かめることができる. 図 3.3 において, 固定された値 $m = 10$, $\omega = 1$, $\gamma = 0.1$, $\hbar = 1$ に対して, 時刻 $t = 0$ と $t = 250$ における X の関数としてプロットした $|\phi_n|^2$ ($n = 0, 1, 2$) のグラフを表している. 時刻 t が $t \rightarrow \infty$ になるにつれて, 原点 $X = 0$ の無限小の近傍 \mathfrak{N} において $|\phi_n|^2$ は無限に増加して, 領域 $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{N}$ (\mathbb{R} から \mathfrak{N} を除いた領域) において $|\phi_n|^2$ は 0 へと減少する. ここで, 任意の時刻で $\int |\phi_n(X, t)|^2 dX = 1$ が成り立つことに注意する. エネルギー固有関数 ϕ_n は $\gamma = 0$ の時に, 通常の単純な調和振動子の n 番目のエネルギー固有関数に帰着する.

基底状態のエネルギー固有関数の絶対値 2 乗の考察

ここでは特に, 基底状態のエネルギー固有関数の絶対値 2 乗について考察する. 式 (3.5.15) は $n = 0$ の場合に,

$$\phi_0(X, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\gamma}{4m}t - \frac{m}{2\hbar}\left(\omega - i\frac{\gamma}{2m}\right)e^{\frac{\gamma}{m}t}X^2\right] \quad (3.5.18)$$

となり, この絶対値 2 乗は

$$|\phi_0(X, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[\frac{\gamma}{2m}t - \frac{m\omega}{\hbar}e^{\frac{\gamma}{m}t}X^2\right] \quad (3.5.19)$$

となる. 以下では, 式 (3.5.19) の $t \rightarrow \infty$ 極限について考察する.

新しく u を

$$u := \exp\left[\frac{\gamma}{2m}t\right] \quad (3.5.20)$$

と定義する. 式 (3.5.19) は u を用いると

$$|\phi_0(X, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{u}{\exp\left[\frac{m\omega}{\hbar}u^2X^2\right]} \quad (3.5.21)$$

のように書ける. 式 (3.5.21) は $X = 0$ の場合

$$|\phi_0(0, t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp[u] \quad (3.5.22)$$

となる. 式 (3.5.20) の $t \rightarrow \infty$ 極限は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = \infty \quad (3.5.23)$$

となるため, 式 (3.5.22) の $t \rightarrow \infty$ 極限は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_0(0, t)|^2 = \infty \quad (3.5.24)$$

となり, 発散することがわかる. 次に, $X \neq 0$ の場合の式 (3.5.21) の $t \rightarrow \infty$ 極限を考える. このとき, 式 (3.5.23) から,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp \left[\frac{m\omega}{\hbar} u^2 X^2 \right] = \infty \quad (3.5.25)$$

が成り立つため, ロピタルの定理より,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\phi_0(X, t)|^2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{u'}{(\exp [\frac{m\omega}{\hbar} u^2 X^2])'} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{\frac{2m\omega}{\hbar} X^2 u \exp [\frac{m\omega}{\hbar} u^2 X^2]} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

となる. (変数の肩にあるプライムは u に関する微分を表している.) 式 (3.5.17), 式 (3.5.24), 式 (3.5.26) から, 式 (3.5.19) は時間経過と共にデルタ関数に近づくことがわかる.

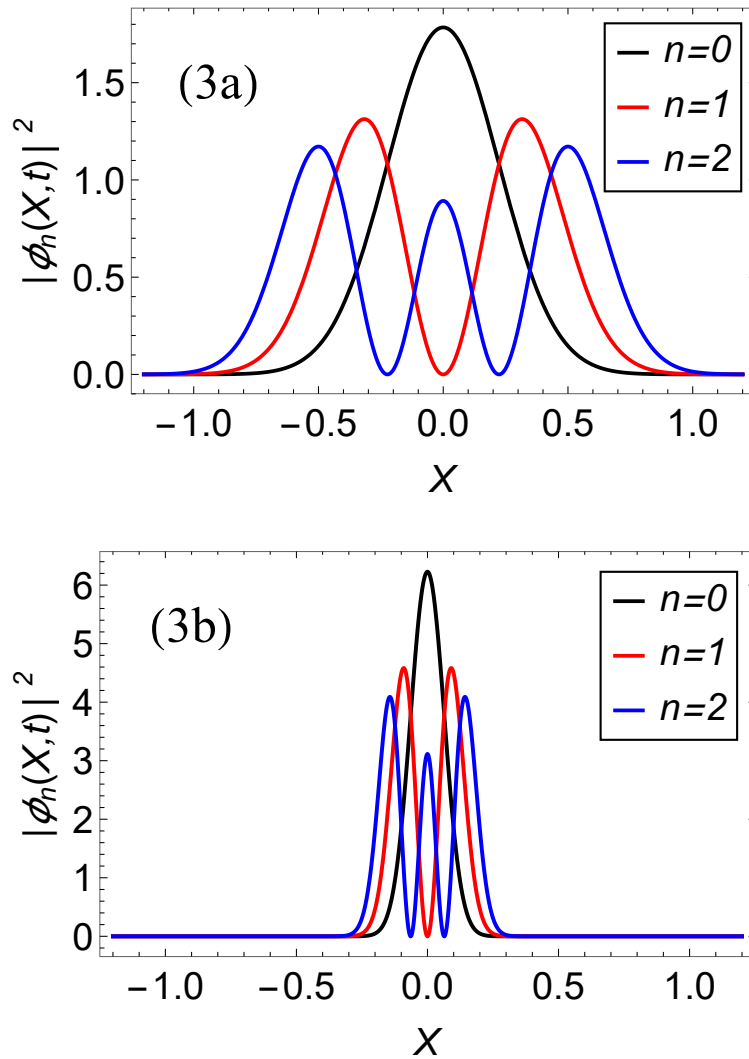


図 3.3: 図 (3a) と図 (3b) は、それぞれ時刻 $t = 0$ と $t = 250$ における $|\phi_n(X,t)|^2$ ($n = 0, 1, 2$) のグラフを表している。

3.6 Schrödinger 方程式とその解

いま、 $|\psi(t)\rangle$ を Fock 基底 $\{|n, t\rangle_S\}$ に関して展開できる状態ベクトルとする。その時、Schrödinger 方程式 $i\hbar d|\psi(t)\rangle/dt = \hat{H}(0)|\psi(t)\rangle$ は

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}_S(t) |\psi(t)\rangle \quad (3.6.1)$$

のように書かれる. ここで, $\hat{H}_S(t)$ は

$$\begin{aligned} \hat{H}_S(t) := & \frac{\hbar\omega_-^2}{\omega} \left(\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \frac{1}{2} \right) + \frac{\gamma}{2m}\hat{N}'_0 \\ & - \frac{\hbar\gamma^2}{8m^2\omega_+} \left\{ \left(1 - i\frac{\gamma}{2m\omega}\right) \hat{a}_S^2(t) + \left(1 + i\frac{\gamma}{2m\omega}\right) \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

であり, ちょうど式 (3.4.10) における \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{N}' をそれぞれ $\hat{a}_S(t)$, $\hat{a}_S^\dagger(t)$, \hat{N}'_0 に置き換えたものとして定義される.⁸ いま, $|\psi(t)\rangle$ を

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_n(t') dt'\right] |n, t\rangle_S \quad (3.6.3)$$

として展開する [41, 42]. ここで, $\Theta_n(t) := {}_S\langle n, t | [i\hbar d/dt - \hat{H}_S(t)] |n, t\rangle_S$ である. さらに, 任意の時刻で $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1$ が成り立つように, 規格化条件 $\sum_n |c_n(t)|^2 = 1$ を課す. この $|\psi(t)\rangle$ を式 (3.6.1) に代入することにより,

$$\begin{aligned} \frac{dc_n(t)}{dt} = & \sum_{n'(\neq n)} \frac{1}{E_n - E_{n'}} {}_S\langle n, t | \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} |n', t\rangle_S \\ & \times c_{n'}(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_{n'}(t') - \Theta_n(t')\} dt'\right] \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

を得る. ここで,

$$\frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} := \frac{d\hat{E}_S(t)}{dt} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{E}_S(t), \hat{H}_S(t)] \quad (3.6.5)$$

である. 式 (3.6.4) を得る過程で, 式 (3.5.14) を用いた. (式 (3.6.4) の導出に関しては, 第 3.8.2 項を参照せよ.) いま, $\Theta_n(t)$ における幾何学的位相 ${}_S\langle n, t | i\hbar d/dt |n, t\rangle_S$ は式 (3.5.4) によって ${}_S\langle n, t | (\gamma/2m)\hat{N}'_0 |n, t\rangle_S$ と相殺することは注目すべき点である.⁹ 結果

⁸式 (3.4.10) と式 (3.5.9) を用いると,

$$\hat{H}(0)|n, t\rangle_S = \hat{H}_S(t)|n, t\rangle_S$$

が示される. この式の両辺に, 左から ${}_S\langle n, t |$ を掛けて, 式 (3.5.2) を用いると,

$$\langle n, t | \hat{H}(t) |n, t\rangle = {}_S\langle n, t | \hat{H}_S(t) |n, t\rangle_S$$

が得られる. 従って, Heisenberg 描像におけるハミルトニアン演算子の期待値と, Schrödinger 描像におけるハミルトニアン演算子の期待値が一致することが確かめられる.

⁹実際に, 式 (3.5.4) と規格化条件 ${}_S\langle n, t | n, t\rangle_S = 1$ を用いると,

$$\begin{aligned} {}_S\langle n, t | \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \frac{\gamma}{2m}\hat{N}'_0 \right) |n, t\rangle_S &= {}_S\langle n, t | i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S + i\hbar \frac{d}{dt} ({}_S\langle n, t |) |n, t\rangle_S \\ &= i\hbar \frac{d}{dt} {}_S\langle n, t | n, t\rangle_S = 0 \end{aligned}$$

が示される.

として, $\Theta_n(t)$ は力学的位相のみが残り, 都合良く簡易化されて $\Theta_n = -\hbar(\omega_-^2/\omega)(n + 1/2)$ となる. このとき, 波動関数は

$$\psi(X, t) := \langle X | \psi(t) \rangle = \sum_n c_n(t) e^{(i/\hbar)\Theta_n t} \phi_n(X, t) \quad (3.6.6)$$

のようになる. 固有関数 (3.5.15) の振る舞いを反映して, $\int |\psi(X, t)|^2 dX = 1$ を保ちながら, 確率密度 $|\psi(X, t)|^2$ の分散は, 時間経過と共に減少して, 最後には 0 になることがわかる.¹⁰ この結果は, 粒子の存在確率が原点の近傍で増加し, それ以外の領域では減少していくことを意味しており, 振幅が減少して, 振動子の位置が原点付近に収束するような減衰調和振動子の古典的な運動と整合している.

幾つかの計算の後に, 式 (3.6.4) は展開係数 $c_n(t)$ に対する微分差分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{\gamma}{4m} \left\{ -\sqrt{(n+1)(n+2)} e^{-i(2\alpha t + \beta)} c_{n+2}(t) \right. \\ \left. + \sqrt{n(n-1)} e^{i(2\alpha t + \beta)} c_{n-2}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

となる. (式 (3.6.7) の導出に関しては, 第 3.8.3 項を参照せよ.) ここで, α と β はそれぞれ, $\alpha = \omega_-^2/\omega$ と $e^{i\beta} = (\omega + i\gamma/2m)/\omega_+$ により定義される. また, $c_n(t)$ と $|c_n(t)|^2$ はそれぞれ, エネルギー固有状態間の遷移振幅と遷移確率を表す. 初期状態が $|l, 0\rangle_S$ となり, それに応じて $\psi(X, 0) = \phi_l(X, 0)$ が保たれるように初期条件 $c_n(0) = \delta_{nl}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) を課す. 微分差分方程式 (3.6.7) の解は, 初期条件 $G(q, 0) = q^l e^{-il\beta/2}/\sqrt{l!}$ と境界条件 $G(0, t) = c_0(t)$ の下での母関数

$$G(q, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-in(\alpha t + \frac{\beta}{2})} c_n(t) \quad (3.6.8)$$

¹⁰式 (3.6.6) を用いると, 確率密度 $|\psi(X, t)|^2$ は

$$\begin{aligned} |\psi(X, t)|^2 &= \sum_n \sum_l c_n(t) c_l^*(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\Theta_n - \Theta_l)t} \phi_n(X, t) \phi_l^*(X, t) \\ &= \sum_n \sum_l c_n(t) c_l^*(t) e^{\frac{i}{\hbar}(\Theta_n - \Theta_l)t} e^{i(\varrho_n - \varrho_l)t} |\phi_n(X, t)| |\phi_l(X, t)| \end{aligned}$$

のように書ける. ここで, ϱ_n を実数として, $\phi_n(X, t) = e^{i\varrho_n t} |\phi_n(X, t)|$ のように極分解を行った. 図 3.3 で示したように, $|\phi_n(X, t)|^2$ は時間経過と共に原点付近に収束するため, $|\phi_n(X, t)|$ も同様に時間経過と共に原点付近に収束する. また, 規格化条件 $\sum_n |c_n(t)|^2 = 1$ が成り立つことから, $|c_n(t)|^2$ の最大値は n が大きくなるに従って小さくなる. このため, $|\psi(X, t)|^2$ の和の添え字が十分大きい場合の項は無視できる. 以上の考察から, $|\psi(X, t)|^2$ も同様に時間経過と共に原点付近に収束することがわかる. 従って, $|\psi(X, t)|^2$ の分散は時間経過と共に減少する.

に対する偏微分方程式

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \left\{ \frac{\gamma}{4m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2 \right) + i\alpha q \frac{\partial}{\partial q} \right\} G \quad (3.6.9)$$

を解くことによって得られる. (式 (3.6.9) の導出に関しては, 第 3.8.4 項を参照せよ. また, 微分差分方程式を解析的に解くことに関しては, 例えば文献 [11, 43, 44] を参照せよ.) 以下では, l を指定した場合の遷移振幅を求める. (ただし, l を指定した場合の $G(q, t)$ と $c_n(t)$ をそれぞれ $G_l(q, t)$ と $c_{n,l}(t)$ のように書くことにする.) 話を分かりやすくするために, 初めに l が偶数である場合, 特に $l = 0, 2, 4$ の場合を先に調べ, その後 l が奇数である場合, 特に $l = 1, 3$ の場合を調べる.

3.6.1 初期時刻における状態が基底状態である場合

$l = 0$ の場合の一般解

$l = 0$ の場合において, 初期状態は $|0, 0\rangle_S$ により表される基底状態である. 式 (3.6.9) の解は

$$G_0(q, t) = \sqrt{\xi} e^{i\alpha t/2} \{ \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m) \}^{-1/2} \\ \times \exp \left[\frac{\sinh(\xi\gamma t/2m)}{2 \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right] \quad (3.6.10)$$

のように得られる. (式 (3.6.10) の導出に関しては, 第 3.8.5 項と第 3.8.6 項を参照せよ.) ここで, ξ と ζ はそれぞれ,

$$\xi := \left(1 - \frac{4m^2\alpha^2}{\gamma^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6.11)$$

$$e^{\pm\zeta} := \xi \pm i \frac{2m\alpha}{\gamma} \quad (3.6.12)$$

によって定義される. 式 (3.6.12) から, $\cosh(\zeta) = \xi$ であることがわかる. いま, $G_0(q, 0) = 1$ を確かめることは簡単である. 式 (3.6.7) の解は, 式 (3.6.10) から以下

のように得られる.¹¹

$$\begin{aligned}
c_{n,0}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{in(\alpha t + \beta/2)} \frac{\partial^n}{\partial q^n} G_0(q, t)|_{q=0} \\
&= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{\sqrt{n!}} \sqrt{\xi} e^{i(n+1/2)\alpha t} e^{in\beta/2} \\ \quad \times \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^{n/2}}{\{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{(n+1)/2}} \\ \quad , n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.14)
\end{aligned}$$

これは確かに条件 $\sum_n^\infty |c_{n,0}(t)|^2 = 1$ (第 3.8.7 項を参照せよ.) , $c_{n,0}(0) = \delta_{n0}$ と $G_0(0, t) = c_{0,0}(t)$ を満たす. ここで, $!!$ は二重階乗を表し, $(-1)!! = 0!! = 1$ を満たす.

いま, $|c_{n,0}(t)|^2$ によって記述される $|0, 0\rangle_S$ から $|n, t\rangle_S$ への遷移確率を調べる. 量子数 n が奇数の時には遷移は起こらないので, 以下では n が偶数の場合のみ考える. 式 (3.6.14) からわかる通り, $|c_{n,0}(t)|^2$ の時間変化は本質的に $\exp[\pm\xi\gamma t/2m]$ に依存している. 以下の 3 つの場合 (a) $(0 \leq) \gamma < \gamma_*$, (b) $\gamma = \gamma_*$, (c) $(2m\omega >) \gamma > \gamma_*$ において個別に $|c_{n,0}(t)|^2$ を調べる必要がある.¹² ここで, γ_* は臨界定数 $(\sqrt{5}-1)m\omega \simeq 1.236m\omega$ を表している. また, $2m\omega > \gamma$ は減衰振動に対する古典的な条件である.

(a) の場合において, ξ は純虚数となる. 従って $|c_{n,0}(t)|^2$ は周期関数となる. 図 (4a) において, $\gamma < \gamma_*$ を満たす固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1$ に対する $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している. 遷移確率 $|c_{n,0}(t)|^2$ は確かに同じ周期で周期的に変化する. 特に, 一定の周期で基底状態の遷移確率が 1 となる.

¹¹ 式の導出に際して, 公式

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} (\exp[aq^2])|_{q=0} = \begin{cases} (n-1)!!(2a)^{\frac{n}{2}}, & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.13)$$

を用いた. ここで, a は任意の定数である.

¹² 式 (3.6.11) に $\alpha = \omega_-^2/\omega = \omega - \gamma^2/4m^2\omega$ を代入して, 因数分解をすると

$$\begin{aligned}
\xi &= \left(3 - \frac{4m^2\omega^2}{\gamma^2} - \frac{\gamma^2}{4m^2\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2m\omega\gamma} \left[\{(\sqrt{5}+1)m\omega - \gamma\} \{\gamma - (\sqrt{5}-1)m\omega\} \right. \\
&\quad \left. \times (2\sqrt{5}m\omega\gamma + \gamma^2 + 4m^2\omega^2) \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

となる. 減衰振動に対する古典的な条件 $2m\omega > \gamma$ から, $(\sqrt{5}+1)m\omega - \gamma$ は正の値をとる. 一方, $\gamma - (\sqrt{5}-1)m\omega$ は, 3 つの場合 (a), (b), (c) において, それぞれ負の値, 0, 正の値をとる. 従って, ξ は (a) の場合には純虚数, (b) の場合には 0, (c) の場合には正の実数となる.

(b) の場合において, ξ は消える. 従って,

$$c_{n,0}(t) = \frac{(n-1)!!}{\sqrt{n!}} e^{i(n+1/2)\alpha t} e^{in\beta/2} \frac{(\gamma t/2m)^{n/2}}{(1+i\alpha t)^{(n+1)/2}} \quad (3.6.15)$$

を得るために $\xi = 0$ の周りで式 (3.6.14) を展開する必要がある. 明らかに, $|c_{n,0}(t)|^2$ は無理関数である. 図 (4b) は, $\gamma = \gamma_*$ を満たす固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = \sqrt{5} - 1$ に対する $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している. 遷移確率 $|c_{0,0}(t)|^2$ は単調減少する一方で, $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 2, 4, 6, \dots$) は n の順に一旦増加して, 後に単調減少する.

(c) の場合において, ξ は正の実数となる. 従って $|c_{n,0}(t)|^2$ は実数の双曲線関数の組み合わせとなる. 図 (4c) は $\gamma > \gamma_*$ を満たす固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1.5$ に対する $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している. 図 (4c) における曲線の形は図 (4b) における曲線の形とよく似ているが, 変化率が異なり, これは本質的に $\exp[\pm\xi\gamma t/2m]$ ($\xi > 0$) の存在によるものである.

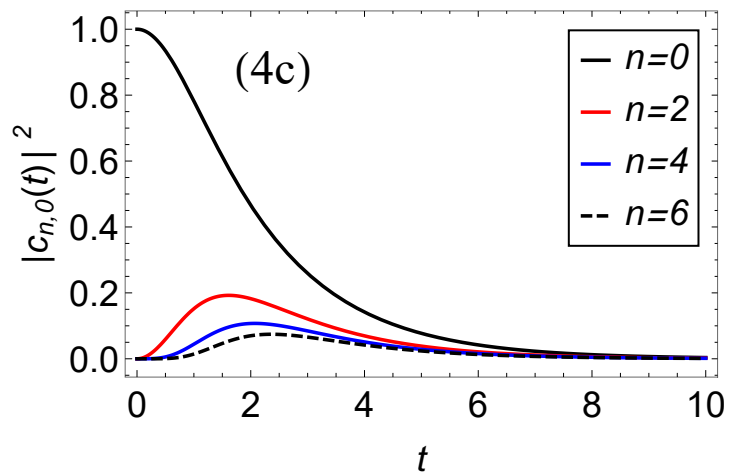
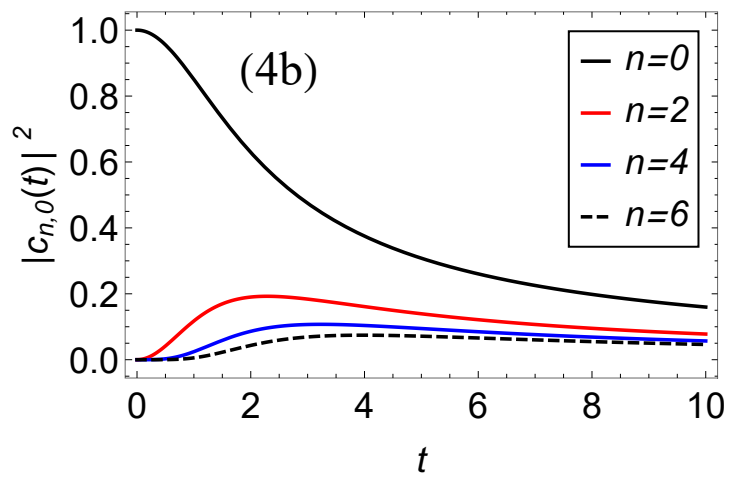
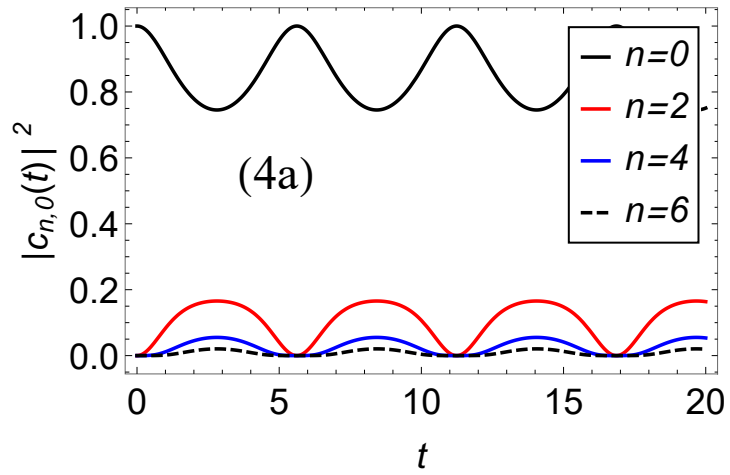


図 3.4: 図 (4a), 図 (4b), 図 (4c) は, それぞれ (a), (b), (c) の場合においてプロットした $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している.

3.6.2 初期時刻における状態が励起状態である場合

$l = 2$ の場合の一般解

$l = 2$ の場合において、初期状態は、 $|2, 0\rangle_S$ によって表される第2励起状態である。実際に $l = 2$ に対する式 (3.6.9) の解を得ることができて、それを $G_2(q, t)$ として定義する。

$$G_2(q, t) = \sqrt{\frac{\xi}{2}} e^{i\alpha t/2} e^{-i\beta} \left\{ -\sinh(\xi\gamma t/2m) + \frac{\xi^2}{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right\} \\ \times \{ \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m) \}^{-3/2} \exp \left[\frac{\sinh(\xi\gamma t/2m)}{2 \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right]. \quad (3.6.16)$$

これは条件 $G_2(q, 0) = q^2 e^{-i\beta} / \sqrt{2}$ を満たす。式 (3.6.7) に対応する解は以下の通りに得られる。¹³

$$c_{n,2}(t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{in(\alpha t + \beta/2)} \frac{\partial^n}{\partial q^n} G_2(q, t) \Big|_{q=0} \\ = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{\sqrt{2n!}} \sqrt{\xi} e^{i(n+1/2)\alpha t} e^{i(n/2-1)\beta} \\ \quad \times \left\{ -\sinh(\xi\gamma t/2m) + \frac{n\xi^2}{\sinh(\xi\gamma t/2m)} \right\} \\ \quad \times \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^{n/2}}{\{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{(n+3)/2}} \\ \quad , n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.18)$$

これは確かに条件 $\sum_n^\infty |c_{n,2}(t)|^2 = 1$, $c_{n,2}(0) = \delta_{n2}$ と $G_2(0, t) = c_{0,2}(t)$ を満たす。

次に、 $|c_{n,2}(t)|^2$ によって記述される $|2, 0\rangle_S$ から $|n, t\rangle_S$ への遷移確率を調べる。以下では、 $l = 0$ の場合と同様に、 n が偶数の場合のみを考える。 $|c_{n,2}(t)|^2$ の時間変化は、本質的に $\exp[\pm\xi\gamma t/2m]$ に依存しているので、上述の3つの場合 (a), (b), (c) において $|c_{n,2}(t)|^2$ を個別に調べる必要がある。

(a) の場合において、 $|c_{n,2}(t)|^2$ は周期関数となる。図 (5a) は、固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1$ に対する $|c_{n,2}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している。遷移確率 $|c_{n,2}(t)|^2$

¹³ 式の導出に際して、式 (3.6.13) と公式

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} (q^2 \exp[aq^2]) \Big|_{q=0} = \begin{cases} n(n-1)!! (2a)^{\frac{n-2}{2}}, & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.17)$$

を用いた。ここで、 a は任意の定数である。

は同じ周期で周期的に変化することが確かめられる．特に，一定の周期で第2励起状態の遷移確率が1となる．

(b)の場合において， ξ は消える．そして，

$$c_{n,2}(t) = \frac{(n-1)!!}{\sqrt{2n!}} e^{i(n+1/2)\alpha t} e^{i(n/2-1)\beta} \times \left(-\frac{\gamma t}{2m} + \frac{2mn}{\gamma t} \right) \frac{(\gamma t/2m)^{n/2}}{(1+i\alpha t)^{(n+3)/2}} \quad (3.6.19)$$

を得るために $\xi = 0$ の周りで式(3.6.18)を展開する必要がある．明らかに， $|c_{n,2}(t)|^2$ は無理関数である．図(5b)は，固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = \sqrt{5} - 1$ に対する $|c_{n,2}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$)のグラフを表している．

(c)の場合において， $|c_{n,2}(t)|^2$ は実数の双曲線関数の組合わせとなる．図(5c)は，固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1.5$ に対する $|c_{n,2}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$)のグラフを表している．

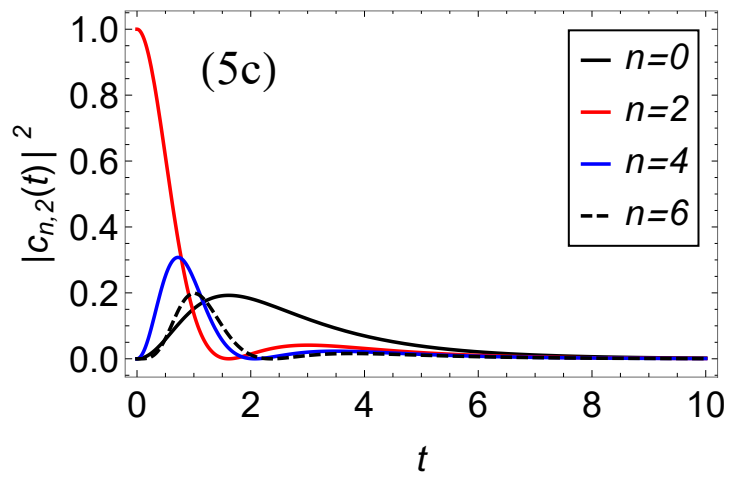
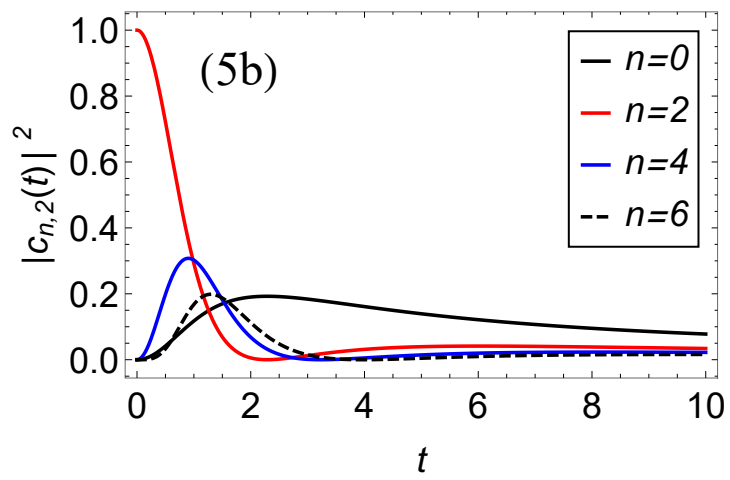
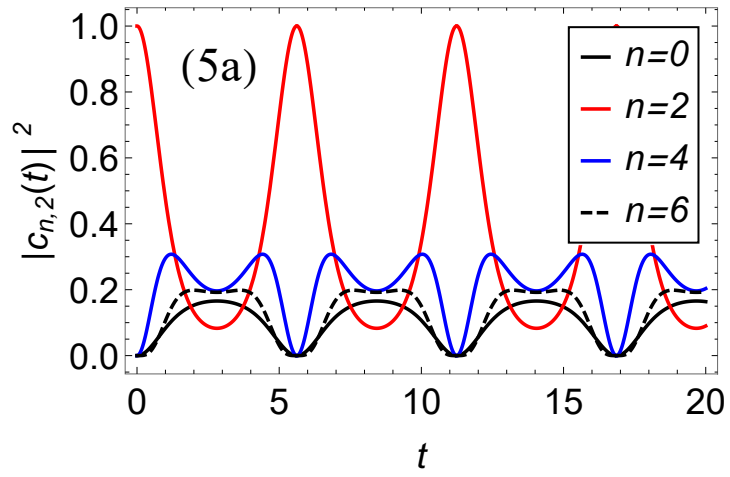


図 3.5: 図 (5a), 図 (5b), 図 (5c) はそれぞれ (a), (b), (c) の場合においてプロットした $|c_{n,2}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している。

$l = 4$ の場合の一般解

$l = 4$ の場合において, 初期状態は, $|4, 0\rangle_S$ によって表される第 4 励起状態である. 実際に $l = 4$ に対する式 (3.6.9) の解を得ることができて, それを $G_4(q, t)$ として定義する.

$$\begin{aligned}
 G_4(q, t) &= \sqrt{\frac{\xi}{4!}} e^{i\alpha t/2} e^{-2i\beta} \left[3 \{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 6 \sinh(\xi\gamma t/2m) \frac{\xi^2}{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\xi^4}{\{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^2} q^4 \right] \{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{-5/2} \\
 &\quad \times \exp \left[\frac{\sinh(\xi\gamma t/2m)}{2 \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right]. \tag{3.6.20}
 \end{aligned}$$

これは条件 $G_4(q, 0) = e^{-2i\beta} q^4 / \sqrt{4!}$ を満たす. 式 (3.6.7) に対応する解は以下の通りに得られる.¹⁴

$$\begin{aligned}
 c_{n,4}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{in(\alpha t + \beta/2)} \frac{\partial^n}{\partial q^n} G_4(q, t) \Big|_{q=0} \\
 &= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{\sqrt{4!n!}} \sqrt{\xi} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-4)/2} \\ \quad \times \left[3 \{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 6n\xi^2 + \frac{n(n-2)\xi^4}{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2} \right] \\ \quad \times \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^{n/2}}{\{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{(n+5)/2}} \\ \quad , \quad n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \tag{3.6.22}
 \end{aligned}$$

これは確かに条件 $\sum_n |c_{n,4}(t)|^2 = 1$, $c_{n,4}(0) = \delta_{n4}$ と $G_4(0, t) = c_{0,4}(t)$ を満たす.

次に, $|c_{n,4}(t)|^2$ によって記述される $|4, 0\rangle_S$ から $|n, t\rangle_S$ への遷移確率を調べる. 以下では, n が偶数の場合のみを考える. $|c_{n,4}(t)|^2$ の時間変化は, 本質的に $\exp[\pm\xi\gamma t/2m]$ に依存しているので, 上述の 3 つの場合 (a), (b), (c) において $|c_{n,4}(t)|^2$ を個別に調べる必要がある.

¹⁴ 式の導出に際して, 式 (3.6.13), 式 (3.6.17) と公式

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} (q^4 \exp[aq^2]) \Big|_{q=0} = \begin{cases} n(n-2) \{(n-1)!!\} (2a)^{\frac{n-4}{2}}, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \tag{3.6.21}$$

を用いた. ここで, a は任意の定数である.

(a) の場合において, $|c_{n,4}(t)|^2$ は周期関数となる. 図 (6a) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1$ に対する $|c_{n,4}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している. 遷移確率 $|c_{n,4}(t)|^2$ は同じ周期で周期的に変化することが確かめられる. 特に, 一定の周期で第 4 励起状態の遷移確率が 1 となる.

(b) の場合において, ξ は消える. そして,

$$c_{n,4}(t) = \frac{(n-1)!!}{\sqrt{4!n!}} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-4)/2} \times \left\{ 3(\gamma t/2m)^2 - 6n + n(n-2)(2m/\gamma t)^2 \right\} \frac{(\gamma t/2m)^{n/2}}{(1+i\alpha t)^{(n+5)/2}} \quad (3.6.23)$$

を得るために $\xi = 0$ の周りで式 (3.6.22) を展開する必要がある. 明らかに, $|c_{n,4}(t)|^2$ は無理関数である. 図 (6b) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = \sqrt{5} - 1$ に対する $|c_{n,4}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している.

(c) の場合において, $|c_{n,4}(t)|^2$ は実数の双曲線関数の組合わせとなる. 図 (6c) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1.5$ に対する $|c_{n,4}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している.

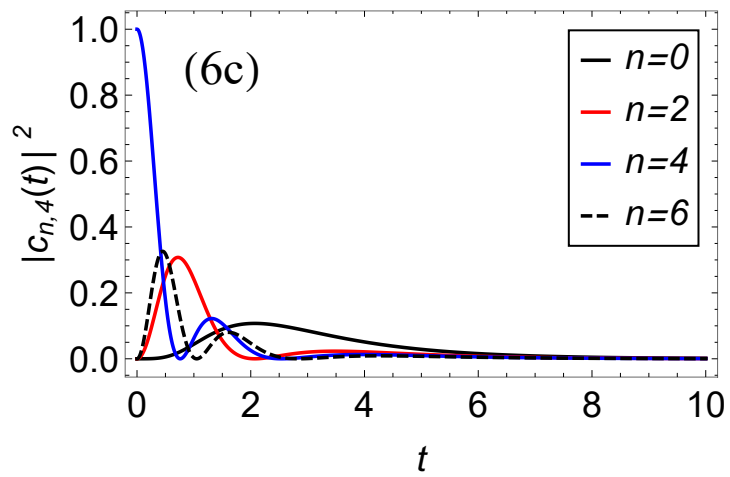
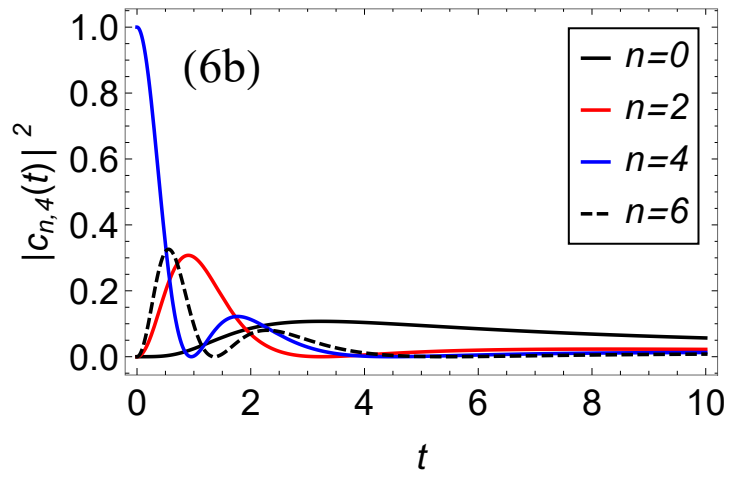
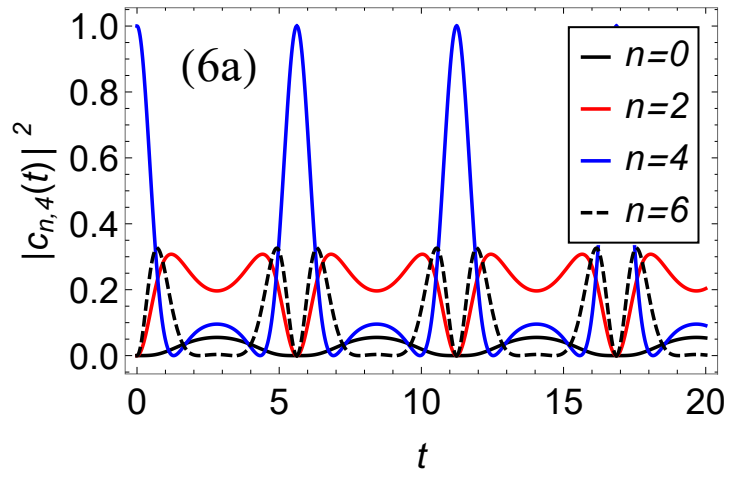


図 3.6: 図 (6a), 図 (6b), 図 (6c) はそれぞれ (a), (b), (c) の場合においてプロットした $|c_{n,4}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している。

$l = 1$ の場合の一般解

$l = 1$ の場合において, 初期状態は, $|1, 0\rangle_S$ によって表される第 1 励起状態である. 実際に $l = 1$ に対する式 (3.6.9) の解を得ることができて, それを $G_1(q, t)$ として定義する.

$$G_1(q, t) = \xi^{\frac{3}{2}} e^{i\alpha t/2} e^{-i\beta/2} \{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{-3/2} q \exp\left[\frac{\sinh(\xi\gamma t/2m)}{2 \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2\right]. \quad (3.6.24)$$

これは条件 $G_1(q, 0) = e^{-i\beta/2} q$ を満たす. 式 (3.6.7) に対応する解は以下の通りに得られる.¹⁵

$$c_{n,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{in(\alpha t + \beta/2)} \frac{\partial^n}{\partial q^n} G_1(q, t) \Big|_{q=0} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{n!!}{\sqrt{n!}} \xi^{\frac{3}{2}} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-1)/2} \\ \quad \times \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^{(n-1)/2}}{\{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)\}^{(n+2)/2}} \\ \quad, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.26)$$

これは確かに条件 $\sum_n^\infty |c_{n,1}(t)|^2 = 1$, $c_{n,1}(0) = \delta_{n1}$ と $G_1(0, t) = c_{0,1}(t)$ を満たす.

次に, $|c_{n,1}(t)|^2$ によって記述される $|1, 0\rangle_S$ から $|n, t\rangle_S$ への遷移確率を調べる. 以下では, n が奇数の場合のみを考える. $|c_{n,1}(t)|^2$ の時間変化は, 本質的に $\exp[\pm\xi\gamma t/2m]$ に依存しているので, 上述の 3 つの場合 (a), (b), (c) において $|c_{n,1}(t)|^2$ を個別に調べる必要がある.

(a) の場合において, $|c_{n,1}(t)|^2$ は周期関数となる. 図 (7a) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1$ に対する $|c_{n,1}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している. 遷移確率 $|c_{n,1}(t)|^2$ は同じ周期で周期的に変化することが確かめられる. 特に, 一定の周期で第 1 励起状態の遷移確率が 1 となる.

(b) の場合において, ξ は消える. そして,

$$c_{n,1}(t) = \frac{n!!}{\sqrt{n!}} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-1)/2} \frac{(\gamma t/2m)^{(n-1)/2}}{(1 + i\alpha t)^{(n+2)/2}} \quad (3.6.27)$$

¹⁵ 式の導出に際して, 公式

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} (q \exp[aq^2]) \Big|_{q=0} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ n!! (2a)^{\frac{n-1}{2}}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.25)$$

を用いた. ここで, a は任意の定数である.

を得るために $\xi = 0$ の周りで式 (3.6.26) を展開する必要がある。明らかに, $|c_{n,1}(t)|^2$ は無理関数である。図 (7b) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = \sqrt{5} - 1$ に対する $|c_{n,1}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している。

(c) の場合において, $|c_{n,1}(t)|^2$ は実数の双曲線関数の組合わせとなる。図 (7c) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1.5$ に対する $|c_{n,1}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している。

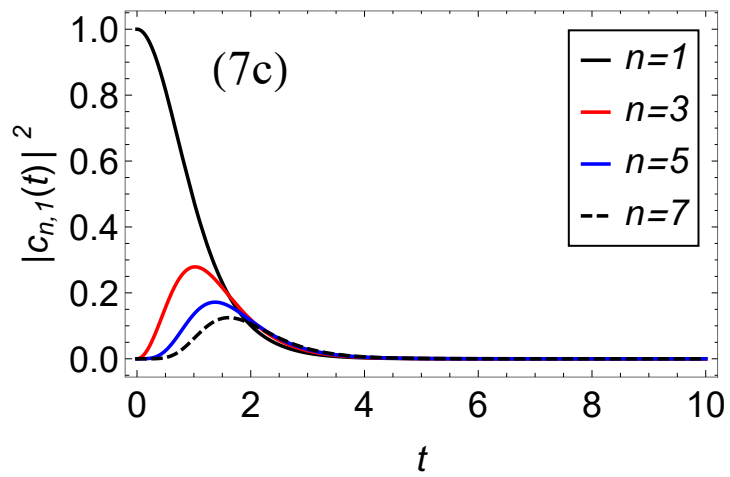
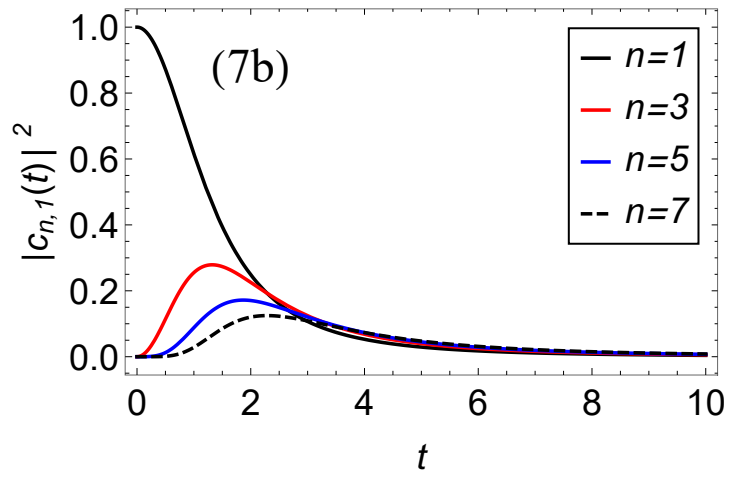
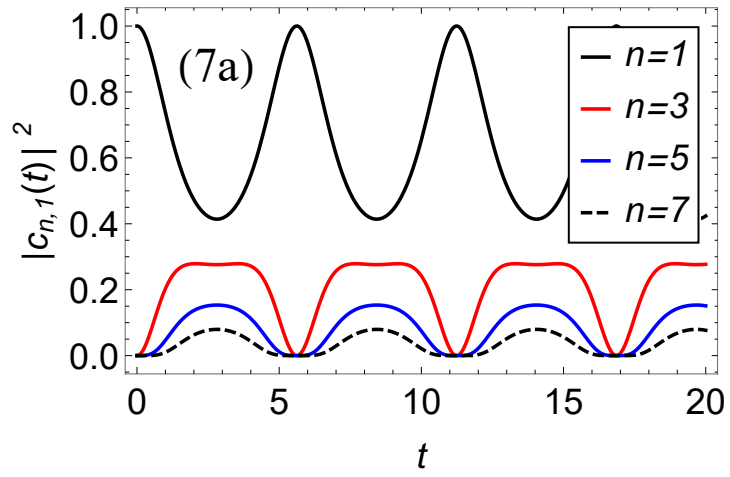


図 3.7: 図 (7a), 図 (7b), 図 (7c) はそれぞれ (a), (b), (c) の場合においてプロットした $|c_{n,1}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している。

$l = 3$ の場合の一般解

$l = 3$ の場合において、初期状態は、 $|3, 0\rangle_S$ によって表される第3励起状態である。実際に $l = 3$ に対する式 (3.6.9) の解を得ることができて、それを $G_3(q, t)$ として定義する。

$$G_3(q, t) = \sqrt{\frac{\xi}{3!}} e^{i\alpha t/2} e^{-3i\beta/2} \left\{ -3\xi \sinh(\xi\gamma t/2m)q + \frac{\xi^3}{\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^3 \right\} \\ \times \{ \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m) \}^{-5/2} \exp \left[\frac{\sinh(\xi\gamma t/2m)}{2 \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)} q^2 \right]. \quad (3.6.28)$$

これは条件 $G_3(q, 0) = e^{-3i\beta/2} q^3 / \sqrt{3!}$ を満たす。式 (3.6.7) に対応する解は以下の通りに得られる。¹⁶

$$c_{n,3}(t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{in(\alpha t + \beta/2)} \frac{\partial^n}{\partial q^n} G_3(q, t) \Big|_{q=0} \\ = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{n!!}{\sqrt{3!n!}} \sqrt{\xi} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-3)/2} \\ \quad \times \left\{ -3\xi \sinh(\xi\gamma t/2m) + \frac{(n-1)\xi^3}{\sinh(\xi\gamma t/2m)} \right\} \\ \quad \times \frac{\{ \sinh(\xi\gamma t/2m) \}^{(n-1)/2}}{\{ \cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m) \}^{(n+4)/2}} \\ \quad , & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.30)$$

これは確かに条件 $\sum_n |c_{n,3}(t)|^2 = 1$, $c_{n,3}(0) = \delta_{n3}$ と $G_3(0, t) = c_{0,3}(t)$ を満たす。

次に、 $|c_{n,3}(t)|^2$ によって記述される $|3, 0\rangle_S$ から $|n, t\rangle_S$ への遷移確率を調べる。以下では、 n が奇数の場合のみを考える。 $|c_{n,3}(t)|^2$ の時間変化は、本質的に $\exp[\pm \xi\gamma t/2m]$ に依存しているので、上述の3つの場合 (a), (b), (c) において $|c_{n,3}(t)|^2$ を個別に調べる必要がある。

(a) の場合において、 $|c_{n,3}(t)|^2$ は周期関数となる。図 (8a) は、固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1$ に対する $|c_{n,3}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している。遷移確率 $|c_{n,3}(t)|^2$ は同じ周期で周期的に変化することが確かめられる。特に、一定の周期で第3励起状態の遷移確率が1となる。

¹⁶ 式の導出に際して、式 (3.6.25) と公式

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} (q^3 \exp[aq^2]) \Big|_{q=0} = \begin{cases} 0, & n = 0, 2, 4, \dots, \\ (n-1)(n!!)(2a)^{\frac{n-3}{2}}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.6.29)$$

を用いた。ここで、 a は任意の定数である。

(b) の場合において, ξ は消える. そして,

$$c_{n,3}(t) = \frac{n!!}{\sqrt{3!n!}} e^{i\alpha(n+1/2)t} e^{i\beta(n-3)/2} \times \{-(3\gamma t/2m) + 2m(n-1)/\gamma t\} \frac{(\gamma t/2m)^{(n-1)/2}}{(1+i\alpha t)^{(n+4)/2}} \quad (3.6.31)$$

を得るために $\xi = 0$ の周りで式 (3.6.30) を展開する必要がある. 明らかに, $|c_{n,3}(t)|^2$ は無理関数である. 図 (8b) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = \sqrt{5} - 1$ に対する $|c_{n,3}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している.

(c) の場合において, $|c_{n,3}(t)|^2$ は実数の双曲線関数の組合わせとなる. 図 (8c) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ と $\gamma = 1.5$ に対する $|c_{n,3}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している.

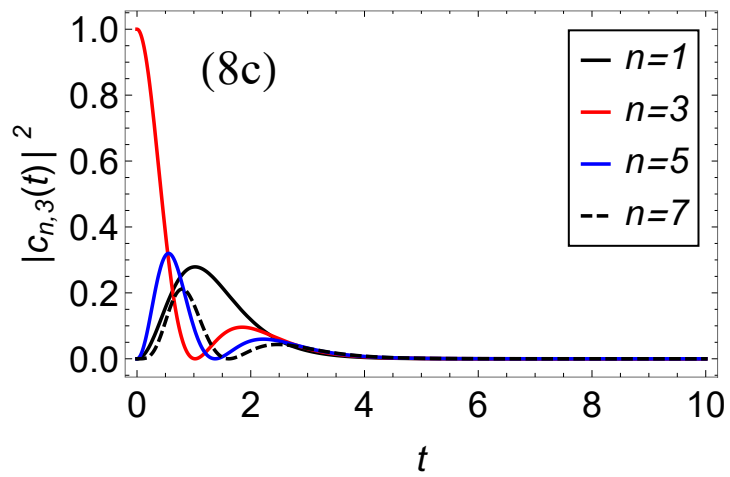
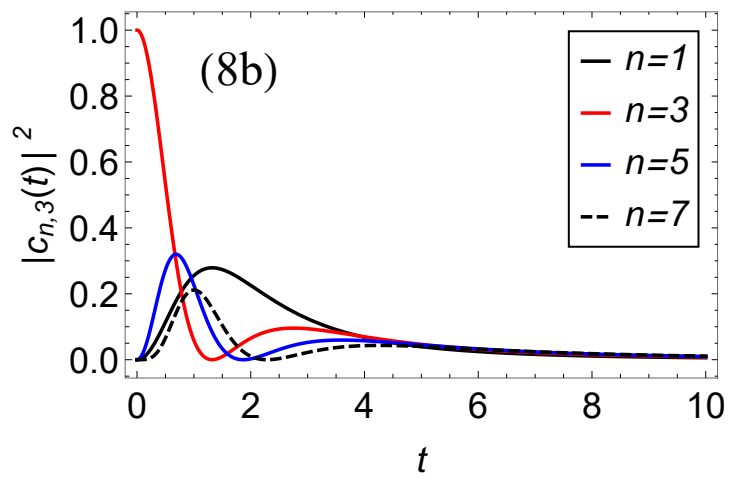
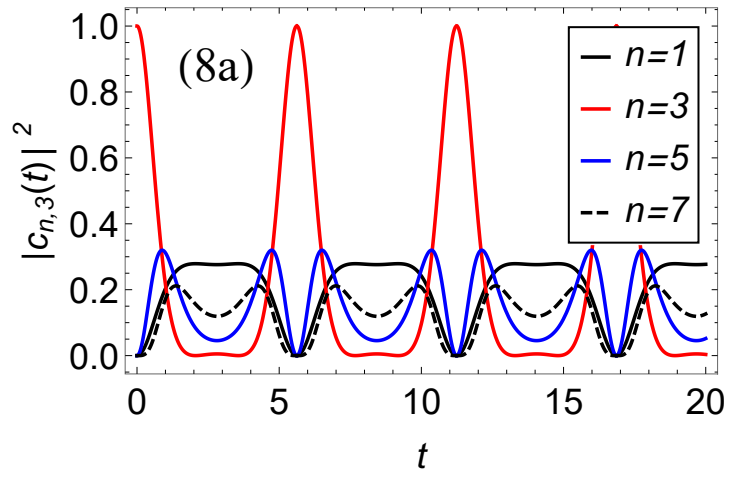


図 3.8: 図 (8a), 図 (8b), 図 (8c) はそれぞれ (a), (b), (c) の場合においてプロットした $|c_{n,3}(t)|^2$ ($n = 1, 3, 5, 7$) のグラフを表している。

初期時刻における状態が偶数量子数の状態である場合、偶数量子数の状態へのみ遷移する。一方で、初期時刻における状態が奇数量子数の状態である場合、奇数量子数の状態へのみ遷移し、特に基底状態への遷移は起こらないことがわかる。

同じ γ と n に対してプロットした図 3.4, 図 3.5, 図 3.6 におけるグラフを比較することにより、図 3.5 におけるグラフの大半は、図 3.4 における対応するグラフよりもより多くの変曲点を持つことがわかる。さらに、図 3.6 におけるグラフの大半は、図 3.5 における対応するグラフよりもより多くの変曲点を持つことがわかる。

本研究では、 l を指定した場合の $|c_{n,l}(t)|^2$ のグラフを調べた。このため、任意の l と n の場合における、 $|c_{n,l}(t)|^2$ のグラフの詳細を解析的に調べる必要がある。

3.6.3 遷移確率の最大値についての考察

式 (3.6.15) の絶対値 2 乗を t で微分すると

$$\frac{d}{dt}|c_{n,0}(t)|^2 = \frac{\{(n-1)!!\}^2}{n!} \frac{n - \gamma^2 t^2 / 4m^2}{t} \frac{(\gamma t / 2m)^n}{(1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2)^{(n+3)/2}} \quad (3.6.32)$$

となる。式 (3.6.32) は $t = 0$ と $t = 2m\sqrt{n}/\gamma$ の時に右辺が 0 となる。また、式 (3.6.32) は $n = 0$ の場合に

$$\frac{d}{dt}|c_{0,0}(t)|^2 = -\frac{\gamma^2 t / 4m^2}{(1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2)^{3/2}} \leq 0 \quad (3.6.33)$$

となり、 $|c_{0,0}(t)|^2$ は単調減少する。このため、 $|c_{0,0}(t)|^2$ は $t = 0$ のときに最大値 $\max |c_{0,0}(t)|^2 = 1$ をとることがわかる。

以上のことから、 $t = 2m\sqrt{n}/\gamma$ の時に $|c_{n,0}(t)|^2$ は各々の n で最大値をとり、その値は

$$\max |c_{n,0}(t)|^2 = \frac{\{(n-1)!!\}^2}{(n)!} n^{n/2} (n+1)^{-(n+1)/2} \quad (3.6.34)$$

であることがわかる。同様の操作を式 (3.6.14) に用いることで式 (3.6.34) が成り立つことが確かめられる。従って、 $|c_{n,0}(t)|^2$ は、(b) と (c) の場合にパラメータ (m, ω, γ) に依らない最大値を持つことがわかる。¹⁷ (b) と (c) どちらの場合も同じ最大値 (3.6.34) を持つ。他の l の場合、すなわち $|c_{n,l}(t)|^2$ でも (b) と (c) の場合に、パラメータに依らない最大値を持つのかを調べる必要がある。

¹⁷図 (4a) と第 3.8.8 項の図 (9b) を比較することからわかるように、(a) の場合では γ の値に依存して、遷移確率の最大値は変化する。

3.7 まとめと今後の課題

この章では、修正された Bateman ラグランジアンに基づき、減衰調和振動子の量子化を行った。結論として、量子力学における減衰調和振動子は、エネルギー固有値 (3.4.18) が等しい間隔を保ちながら時間経過と共に指数関数的に減少し、それに応じてエネルギー固有状態間の遷移を伴うものと理解される。筆者の知る限りでは、過去の文献において、このような減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いは知られてこなかった。また、新たな臨界定数 $\gamma_* \equiv (\sqrt{5} - 1)m\omega$ を基準として、時間発展に伴う遷移確率 $|c_{n,l}(t)|^2$ の振る舞いは3つの場合 (a) $(0 \leq) \gamma < \gamma_*$, (b) $\gamma = \gamma_*$, (c) $(2m\omega >) \gamma > \gamma_*$ で異なることを示した。具体的に、(a) の場合は遷移確率が t の周期関数として変化し、(b) の場合は遷移確率が t のべき関数として変化する。また、(c) の場合は遷移確率が t の指数関数として変化する。古典的な臨界定数 $2m\omega$ に加えて、量子化において新たな臨界定数 γ_* が現れることは、大変興味深い。さらに、固有関数 (3.5.15) の振る舞いを反映して、確率密度 $|\psi(X, t)|^2$ の分散は時間経過と共に減少することを示した。この結果は、粒子の存在確率が原点の近傍で増加し、それ以外の領域では減少していくことを意味しており、古典論における減衰調和振動子の振る舞いと整合している。

本研究では最初に力学変数 x と y を持つ倍化された系を考えた。力学変数を2倍にすることは、付加的な変数が熱浴もしくは環境の自由度を表しているかどうかに関わらず、減衰調和振動子のような散逸系を扱うための共通の戦略である [20, 21, 45–48]。実際に、Galley は力学変数を2倍にすることによって、一般的な散逸系に対して、解析力学の新たな枠組みを構成した [45]。この枠組みにおいて、全ての変分を実行した後に、物理的極限と呼ばれる条件を手で課すことにより、おのおのの倍化された変数は単一の物理的変数に帰着される。本研究の手法において、代わりに他の条件 $\rho x = \sigma y$ が式 (3.2.1) のようにラグランジアンレベルにおいて課された。

本研究では、熱エネルギー $Q = H - E$ を考慮したが、熱浴もしくは環境の自由度を明確に扱わなかった。その意味で、本研究の手法は、現象論的な方法と捉えることができる。他の散逸系（放射反作用を受ける粒子など）に本研究の現象論的な手法を一般化することは興味深い。今後、本論文で得られた結果が実験的に支持されたのなら、大変興味深いことである。

3.8 補遺

3.8.1 エネルギー演算子の固有関数 (3.5.15) の導出

ここでは、エネルギー演算子の固有関数 (3.5.15) を実際に導く。

基底状態の固有関数の導出

式 (3.5.11) は式 (3.5.5a) を用いると

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Xi^* e^{\frac{\gamma}{2m}t} \hat{X}_S + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega_+}} \Xi e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \hat{P}_S \right) |0, t\rangle_S = 0 \quad (3.8.1)$$

のように書かれる。

いま、 X を対角化する表示をとると、式 (3.5.1) から

$$\langle X | \hat{X}_S = X \langle X |, \quad \langle X | \hat{P}_S = -i\hbar \frac{d}{dX} \langle X | \quad (3.8.2)$$

となる。式 (3.8.1) の両辺に左から $\langle X |$ を掛けて、式 (3.8.2) を用いると、次のような微分方程式が得られる。

$$\left[\frac{d}{dX} + \frac{m}{\hbar} \left(\omega - i \frac{\gamma}{2m} \right) e^{\frac{\gamma}{m}t} X \right] \phi_0(X, t) = 0. \quad (3.8.3)$$

ここで、 $\phi_0(X, t) := \langle X | 0, t \rangle_S$ である。この微分方程式の解は、 $f(t)$ を t の関数として

$$\phi_0(X, t) = f(t) \exp \left[-\frac{m}{2\hbar} \left(\omega - i \frac{\gamma}{2m} \right) e^{\frac{\gamma}{m}t} X^2 \right] \quad (3.8.4)$$

となる。関数 $f(t)$ は、以下のように規格化条件を課すことによって決定される。

初めに、完全性の条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |X\rangle \langle X| dX = \mathbb{1}$ の下で

$$\langle 0, t | 0, t \rangle = {}_S \langle 0, t | 0, t \rangle_S = \int_{-\infty}^{\infty} {}_S \langle 0, t | X \rangle \langle X | 0, t \rangle_S dX = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(X, t)|^2 dX \quad (3.8.5)$$

が成り立つ。

式 (3.8.5) は、規格化条件 $\langle 0, t | 0, t \rangle = 1$ を課すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_0(X, t)|^2 dX = 1 \quad (3.8.6)$$

となる。式 (3.8.4) とその複素共役をこの式に代入することで、 $f(t)$ が

$$f(t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\gamma}{4m}t} \quad (3.8.7)$$

と求まる. この $f(t)$ を式 (3.8.4) に代入することで, 基底状態の固有関数が

$$\phi_0(X, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\gamma}{4m}t - \frac{m}{2\hbar}\left(\omega - i\frac{\gamma}{2m}\right)e^{\frac{\gamma}{2m}t}X^2\right] \quad (3.8.8)$$

のように求まる.

励起状態の固有関数の導出

式 (3.5.10) に式 (3.5.5b) を代入して, 左から $\langle X|$ を掛けて, 式 (3.8.2) を用いると第 n 励起状態の固有関数が

$$\phi_n(X, t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega_+}{2\hbar}} \Xi e^{\frac{\gamma}{2m}t} X - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_+}} \Xi^* e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \frac{d}{dX} \right)^n \phi_0(X, t) \quad (3.8.9)$$

のように書ける. ここで, $\phi_n(X, t) := \langle X|n, t\rangle_S$ である. 式 (3.8.9) は極分解 $\Xi = |\Xi|e^{i\varsigma}$, $\Xi^* = |\Xi|e^{-i\varsigma}$ をすると

$$\begin{aligned} \phi_n(X, t) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{|\Xi|}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} e^{(i\varsigma + \frac{\gamma}{2m}t)} X - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_+}} e^{-(i\varsigma + \frac{\gamma}{2m}t)} \frac{d}{dX} \right)^n \phi_0(X, t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{|\Xi|}{\sqrt{2}} \right)^n \left(\eta - \frac{d}{d\eta} \right)^n \phi_0(X, t) \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

となる. ここで, η は

$$\eta := \sqrt{\frac{m\omega_+}{\hbar}} e^{(i\varsigma + \frac{\gamma}{2m}t)} X = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \left(\omega + i\frac{\gamma}{2m} \right) e^{\frac{\gamma}{2m}t} X \quad (3.8.11)$$

と定義される. 式 (3.8.10) は

$$\phi_n(X, t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{|\Xi|}{\sqrt{2}} \right)^n (-1)^n e^{\frac{1}{2}\eta^2} \frac{d^n}{d\eta^n} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \phi_0(X, t) \right\} \quad (3.8.12)$$

のように書かれる. 式 (3.8.8) と式 (3.8.11) を組み合わせると

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \phi_0(X, t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\gamma}{4m}t - \frac{\omega}{\omega + i\frac{\gamma}{2m}}\eta^2\right] \\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[\frac{\gamma}{4m}t - \mu^2\right] \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

となる. ここで, μ は

$$\mu := \sqrt{\frac{\omega}{\omega + i\frac{\gamma}{2m}}}\eta \quad (3.8.14)$$

のように定義される. 式 (3.8.13) を式 (3.8.12) に代入して, $|\Xi\rangle = \sqrt{\omega_+/\omega}$ に注意すると, 式 (3.8.12) は μ を用いて

$$\phi_n(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega - i\frac{\gamma}{2m}}{\omega + i\frac{\gamma}{2m}} \right)^{\frac{n}{4}} H_n(\mu) \exp \left[\frac{\gamma}{4m} t - \frac{\omega - i\frac{\gamma}{2m}}{2\omega} \mu^2 \right] \quad (3.8.15)$$

のように書かれる. ここで, $H_n(\mu)$ は Hermite 多項式であり,

$$H_n(\mu) = (-1)^n e^{\mu^2} \frac{d^n}{d\mu^2} e^{-\mu^2} \quad (3.8.16)$$

を満たす. 式 (3.8.11) と式 (3.8.14) から,

$$\mu = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{\frac{\gamma}{2m} t} X \quad (3.8.17)$$

であることがわかる. 式 (3.8.17) を式 (3.8.15) に代入することで, 励起状態の固有関数 $\phi_n(X, t)$ が

$$\begin{aligned} \phi_n(X, t) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega - i\frac{\gamma}{2m}}{\omega + i\frac{\gamma}{2m}} \right)^{\frac{n}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{\frac{\gamma}{2m} t} X \right) \\ &\quad \times \exp \left[\frac{\gamma}{4m} t - \frac{m}{2\hbar} \left(\omega - i\frac{\gamma}{2m} \right) e^{\frac{\gamma}{m} t} X^2 \right] \end{aligned} \quad (3.8.18)$$

のように求まる.

3.8.2 式 (3.6.4) の導出

式 (3.6.1) に式 (3.6.3) を代入すると,

$$\begin{aligned} &\sum_n^\infty i\hbar \frac{dc_n(t)}{dt} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_n(t') dt' \right] |n, t\rangle_S \\ &\quad - \sum_n^\infty c_n(t) \Theta_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_n(t') dt' \right] |n, t\rangle_S \\ &\quad + \sum_n^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_n(t') dt' \right] i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S \\ &= \sum_n^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_n(t') dt' \right] \hat{H}_S(t) |n, t\rangle_S \end{aligned} \quad (3.8.19)$$

となる. ここで, 左辺 2 項目を導く際に, 公式

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \Theta_n(t') dt' = \Theta_n(t) \quad (3.8.20)$$

を用いた. 式 (3.8.19) の両辺に左から

$${}_S\langle n', t | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \Theta_{n'}(t') dt' \right] \quad (3.8.21)$$

を掛けると,

$$\begin{aligned} & \sum_n^\infty i\hbar \frac{dc_n(t)}{dt} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] \delta_{nn'} \\ & - \sum_n^\infty c_n(t) \Theta_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] \delta_{nn'} \\ & + \sum_n^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] {}_S\langle n', t | i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S \\ & = \sum_n^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] {}_S\langle n', t | \hat{H}_S(t) |n, t\rangle_S \quad (3.8.22) \end{aligned}$$

が得られる. ここで, ${}_S\langle n', t |n, t\rangle_S = \delta_{nn'}$ を用いた. 式 (3.8.22) の左辺 1 項目と 2 項目の和をとった後に, 式変形をすると,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_{n'}(t)}{dt} & = c_{n'}(t) \Theta_{n'}(t) \\ & - \sum_n^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] \\ & \times {}_S\langle n', t | \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H}_S(t) \right) |n, t\rangle_S \quad (3.8.23) \end{aligned}$$

が得られる. 式 (3.8.23) の右辺 2 項目に注目すると, $n = n'$ の場合に

$$-c_{n'}(t) {}_S\langle n', t | \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H}_S(t) \right) |n', t\rangle_S = -c_{n'}(t) \Theta_{n'}(t) \quad (3.8.24)$$

となり, 右辺 1 項目と相殺する. このため, 式 (3.8.23) は,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_{n'}(t)}{dt} & = - \sum_{n(\neq n')}^\infty c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{\Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t')\} dt' \right] \\ & \times {}_S\langle n', t | \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H}_S(t) \right) |n, t\rangle_S \quad (3.8.25) \end{aligned}$$

のように書ける.

式 (3.5.14) の両辺に $i\hbar d/dt$ を作用して, 左から ${}_S\langle n', t | (n' \neq n)$ を掛けると

$$\begin{aligned} & {}_S\langle n', t | i\hbar \frac{d\hat{E}_S(t)}{dt} |n, t\rangle_S \\ & = E_n {}_S\langle n', t | i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S - {}_S\langle n', t | \hat{E}_S(t) i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S \\ & = (E_n - E_{n'}) {}_S\langle n', t | i\hbar \frac{d}{dt} |n, t\rangle_S \quad (3.8.26) \end{aligned}$$

が得られる。いま、 $n' \neq n$ の場合を考えているので、 $(E_n - E_{n'}) \neq 0$ となり、式 (3.8.26) は

$${}_S \langle n', t | i\hbar \frac{d}{dt} | n, t \rangle_S = \frac{{}_S \langle n', t | i\hbar \frac{d\hat{E}_S(t)}{dt} | n, t \rangle_S}{E_n - E_{n'}} \quad (3.8.27)$$

と書ける。また、式 (3.5.14) を用いることで、

$${}_S \langle n', t | \hat{H}_S(t) | n, t \rangle_S = \frac{1}{E_n - E_{n'}} {}_S \langle n', t | [\hat{H}_S(t), \hat{E}_S(t)] | n, t \rangle_S \quad (3.8.28)$$

が示される。式 (3.8.27) と式 (3.8.28) を組み合わせることで、

$${}_S \langle n', t | \left(i\hbar \frac{d}{dt} - \hat{H}_S(t) \right) | n, t \rangle_S = \frac{1}{E_n - E_{n'}} {}_S \langle n', t | i\hbar \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} | n, t \rangle_S \quad (3.8.29)$$

が得られる。ここで、

$$\frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} := \frac{d\hat{E}_S(t)}{dt} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{E}_S(t), \hat{H}_S(t)] \quad (3.8.30)$$

である。

式 (3.8.29) を式 (3.8.25) に代入すると、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dc_{n'}(t)}{dt} &= \sum_{n(\neq n')}^{\infty} c_n(t) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t \{ \Theta_n(t') - \Theta_{n'}(t') \} dt' \right] \\ &\quad \times \frac{1}{E_{n'} - E_n} {}_S \langle n', t | i\hbar \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} | n, t \rangle_S \end{aligned} \quad (3.8.31)$$

が得られる。式 (3.8.31) の両辺を $i\hbar$ で割り、さらに n を n' に、 n' を n に置き換えることで、実際に式 (3.6.4) が導かれる。

3.8.3 式 (3.6.7) の導出

ここでは、実際に式 (3.6.4) を計算して、式 (3.6.7) を導く。

初めに、式 (3.6.4) の各部分を計算する。式 (3.5.13) の時間微分は、 $\hat{a}_S(t)$ と $\hat{a}_S^\dagger(t)$ があらわな時間依存性を持ち、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\hat{a}_S^\dagger(t) \hat{a}_S(t) \right) &= \frac{\gamma\omega_+}{2m\omega} \left(\hat{a}_S^2(t) + \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right) \\ &= \frac{\gamma}{2m\omega_+} \left(\omega + \frac{\gamma^2}{4m^2\omega} \right) \left(\hat{a}_S^2(t) + \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right) \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

となることに注意すると

$$\frac{d}{dt}\hat{E}_S(t) = \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}_0} \frac{\gamma}{2m\omega_+} \left(\omega + \frac{\gamma^2}{4m^2\omega} \right) \left(\hat{a}_S^2(t) + \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right) \quad (3.8.33)$$

のようになる. また, エネルギー演算子 (3.5.13) とハミルトニアン演算子 (3.6.2) の交換関係は, 式 (3.5.1) から導かれる関係式 $[e^{-2\hat{\theta}_0}, \hat{N}'_0] = -2i\hbar e^{-2\hat{\theta}_0}$ と式 (3.5.6) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [\hat{E}_S(t), \hat{H}_S(t)] &= \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}_0} \frac{\gamma}{2m\omega_+} \left\{ \left(-i\frac{\gamma}{2m} - \frac{\gamma^2}{4m^2\omega} \right) \hat{a}_S^2(t) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\gamma^2}{4m^2\omega} - i\frac{\gamma}{2m} \right) \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right\} \\ &\quad + \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}_0} \left(-\frac{\gamma}{m} \right) \left(\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \frac{1}{2}\mathbf{1} \right) \end{aligned} \quad (3.8.34)$$

となる. 式 (3.8.33) と式 (3.8.34) から

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} &:= \frac{d\hat{E}_S(t)}{dt} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{E}_S(t), \hat{H}_S(t)] \\ &= \hbar\omega e^{-2\hat{\theta}_0} \frac{\gamma}{m} \left[\frac{1}{2\omega_+} \left\{ \left(\omega - i\frac{\gamma}{2m} \right) \hat{a}_S^2(t) + \left(\omega + i\frac{\gamma}{2m} \right) \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left(\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \frac{1}{2}\mathbf{1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.8.35)$$

が得られる. 式 (3.8.35) を用いると

$$\begin{aligned} {}_s\langle n, t | \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} | n', t \rangle_s &= \hbar\omega e^{-\frac{\gamma}{m}t} \frac{\gamma}{m} \left[\frac{1}{2\omega_+} \left\{ \left(\omega - i\frac{\gamma}{2m} \right) {}_s\langle n, t | \hat{a}_S^2(t) | n', t \rangle_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\omega + i\frac{\gamma}{2m} \right) {}_s\langle n, t | \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) | n', t \rangle_s \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left(n + \frac{1}{2} \right) {}_s\langle n, t | \left(\hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) + \frac{1}{2}\mathbf{1} \right) | n', t \rangle_s \right] \\ &= \hbar\omega e^{-\frac{\gamma}{m}t} \frac{\gamma}{m} \left[\frac{1}{2\omega_+} \left\{ \left(\omega - i\frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{(n+1)(n+2)}\delta_{n+2, n'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\omega + i\frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{n(n-1)}\delta_{n-2, n'} \right\} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \delta_{nn'} \right] \end{aligned} \quad (3.8.36)$$

が得られる. ここで,

$${}_s\langle n, t | \hat{\theta}_0 = \frac{\gamma}{2m} t {}_s\langle n, t |, \quad (3.8.37a)$$

$${}_s\langle n, t | \hat{a}_S^\dagger(t)\hat{a}_S(t) = n {}_s\langle n, t |, \quad (3.8.37b)$$

$${}_s\langle n, t | \hat{a}_S^2(t) = \sqrt{(n+1)(n+2)} {}_s\langle n+2, t |, \quad (3.8.37c)$$

$${}_s\langle n, t | \hat{a}_S^{\dagger 2}(t) = \sqrt{n(n-1)} {}_s\langle n-2, t | \quad (3.8.37d)$$

と規格化条件 ${}_S\langle n, t | n', t \rangle_S = \delta_{nn'}$ を用いた。また,

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\Theta_{n'}(t') - \Theta_n(t')) dt' \right] = \exp \left[-i \frac{\omega_-^2}{\omega} (n' - n)t \right], \quad (3.8.38)$$

$$E_n - E_{n'} = \hbar \omega e^{-\frac{\gamma}{m}t} (n - n') \quad (3.8.39)$$

である。

式 (3.8.36)~(3.8.39) を用いて, 式 (3.6.4) を実際に計算すると

$$\begin{aligned} \frac{dc_n(t)}{dt} &= \sum_{n'(\neq n)}^{\infty} \frac{1}{n - n'} \frac{\gamma}{m} \left[\frac{1}{2\omega_+} \left\{ \left(\omega - i \frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{n+2, n'} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\omega + i \frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{n(n-1)} \delta_{n-2, n'} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left(n + \frac{1}{2} \right) \delta_{nn'} \right] \exp \left[-i \frac{\omega_-^2}{\omega} (n' - n)t \right] c_{n'}(t) \\ &= -\frac{\gamma}{4m\omega_+} \left(\omega - i \frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{(n+1)(n+2)} \exp \left[-2i \frac{\omega_-^2}{\omega} t \right] c_{n+2}(t) \\ &\quad + \frac{\gamma}{4m\omega_+} \left(\omega + i \frac{\gamma}{2m} \right) \sqrt{n(n-1)} \exp \left[2i \frac{\omega_-^2}{\omega} t \right] c_{n-2}(t) \end{aligned} \quad (3.8.40)$$

となる。式 (3.8.40) は, $\alpha = \omega_-^2/\omega$, $e^{i\beta} = (\omega + i\gamma/2m)/\omega_+$ で書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{dc_n(t)}{dt} &= \frac{\gamma}{4m} \left\{ -\sqrt{(n+1)(n+2)} e^{-i(2\alpha t + \beta)} c_{n+2}(t) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{n(n-1)} e^{i(2\alpha t + \beta)} c_{n-2}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.8.41)$$

となり, 実際に式 (3.6.7) が導かれる。

3.8.4 偏微分方程式 (3.6.9) の導出

ここでは, 母関数 (3.6.8) を用いて, 実際に微分差分方程式 (3.6.7) から偏微分方程式 (3.6.9) を導出する。

式 (3.6.7) の両辺に $\frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-in(\alpha t + \frac{\beta}{2})}$ を掛けて, n で和を取ると,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-in(\alpha t + \frac{\beta}{2})} \frac{dc_n(t)}{dt} &= \frac{\gamma}{4m} \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i(\alpha t + \frac{\beta}{2})(n+2)} c_{n+2}(t) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i(\alpha t + \frac{\beta}{2})(n-2)} c_{n-2}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.8.42)$$

となる. 式 (3.6.8) と関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n!}} q^n e^{-in(\alpha+\frac{\beta}{2})} c_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q \frac{\partial}{\partial q} (q^n) e^{-in(\alpha+\frac{\beta}{2})} c_n(t) = q \frac{\partial}{\partial q} G(q, t) \quad (3.8.43)$$

を用いると, 式 (3.8.42) の左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-in(\alpha+\frac{\beta}{2})} \frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} G(q, t) + i\alpha q \frac{\partial}{\partial q} G(q, t) \quad (3.8.44)$$

のように書ける. また, 式 (3.8.42) の右辺の各項はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i(\alpha+\frac{\beta}{2})(n+2)} c_{n+2}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{\sqrt{(n+2)!}} q^n e^{-i(\alpha+\frac{\beta}{2})(n+2)} c_{n+2}(t) \\ &= \sum_{s=2}^{\infty} \frac{s(s-1)}{\sqrt{s!}} q^{s-2} e^{-is(\alpha+\frac{\beta}{2})} c_s(t) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s!}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} q^s \right\} e^{-is(\alpha+\frac{\beta}{2})} c_s(t) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} G(q, t), \end{aligned} \quad (3.8.45a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i(\alpha+\frac{\beta}{2})(n-2)} c_{n-2}(t) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i(\alpha+\frac{\beta}{2})(n-2)} c_{n-2}(t) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(s+2)(s+1)}}{\sqrt{(s+2)!}} q^{s+2} e^{-is(\alpha+\frac{\beta}{2})} c_s(t) = q^2 G(q, t) \end{aligned} \quad (3.8.45b)$$

のように書ける (式 (3.8.45a) では, $s = n+2$, 式 (3.8.45b) では $s = n-2$ のように添え字の置き換えをした.). 式 (3.8.42) に式 (3.8.44) と式 (3.8.45) を用いると, $G(q, t)$ についての偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} G(q, t) = - \left\{ \frac{\gamma}{4m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^2 \right) + i\alpha q \frac{\partial}{\partial q} \right\} G(q, t) \quad (3.8.46)$$

が得られる.

式 (3.6.8) は, $t = 0$ の場合, 初期条件 $c_n(0) = \delta_{nl}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) を用いることで,

$$G(q, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i\frac{n}{2}\beta} c_n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} q^n e^{-i\frac{n}{2}\beta} \delta_{nl} = \frac{1}{\sqrt{l!}} q^l e^{-i\frac{l}{2}\beta} \quad (3.8.47)$$

となり, $q = 0$ の場合は

$$G(0, t) = c_0(t) \quad (3.8.48)$$

となる.

3.8.5 偏微分方程式 (3.6.9) の特殊解の導出 (変数分離による解法)

ここでは $G(q, t)$ を変数分離することにより, 式 (3.6.9) の特殊解を求める. ただし, $\xi = (1 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2)^{1/2} > 0$ の場合を考える.

いま, $G(q, t)$ は変数 $g(q)$ と $T(t)$ を用いて,

$$G(q, t) = g(q)T(t) \quad (3.8.49)$$

のように変数分離できると仮定する. 式 (3.6.9) は式 (3.8.49) を代入して式変形することで,

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \frac{1}{g(q)} \left\{ \frac{\gamma}{4m} \left(q^2 - \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) - i\alpha q \frac{\partial}{\partial q} \right\} g(q) \quad (3.8.50)$$

となる. いま, ϵ を任意の定数として, 式 (3.8.50) から 2 つの微分方程式

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \epsilon, \quad (3.8.51)$$

$$\frac{1}{g(q)} \left\{ \frac{\gamma}{4m} \left(q^2 - \frac{d^2}{dq^2} \right) - i\alpha q \frac{d}{dq} \right\} g(q) = \epsilon \quad (3.8.52)$$

が得られる.

式 (3.8.51) の解は T_0 を任意定数として,

$$T(t) = T_0 \exp[\epsilon t] \quad (3.8.53)$$

のように求まる.

式 (3.8.52) は両辺に $g(q)$ を掛けて, 式変形を行うことで,

$$\left\{ \frac{\gamma}{4m} \left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 \right) - i\alpha q \frac{d}{dq} - \epsilon \right\} g(q) = 0 \quad (3.8.54)$$

となる. いま, $g(q)$ を新たな変数 $h(q)$ を用いて

$$g(q) = \exp \left[-i \frac{m\alpha}{\gamma} q^2 \right] h(q) \quad (3.8.55)$$

のようにおく. 式 (3.8.55) を式 (3.8.54) に代入すると, $h(q)$ についての微分方程式

$$\left[\frac{\gamma}{4m} \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \xi^2 q^2 \right) + i\frac{\alpha}{2} - \epsilon \right] h(q) = 0 \quad (3.8.56)$$

が得られる. ここで, 式 (3.6.11) を用いた. 次に, 新しく \mathcal{Q} を

$$\mathcal{Q} := \sqrt{\xi} q \quad (3.8.57)$$

と定義する. 式 (3.8.57) を用いて式 (3.8.56) を \mathcal{Q} で書き換えると,

$$\left[\frac{\xi\gamma}{4m} \left(-\frac{d^2}{d\mathcal{Q}^2} + \mathcal{Q}^2 \right) + i\frac{\alpha}{2} - \epsilon \right] h(\mathcal{Q}) = 0 \quad (3.8.58)$$

となる. 式 (3.8.58) は両辺に $4m/\xi\gamma$ を掛けて式変形をすると,

$$\left\{ \frac{d^2}{d\mathcal{Q}^2} - \mathcal{Q}^2 + \frac{4m}{\xi\gamma} \left(\epsilon - i\frac{\alpha}{2} \right) \right\} h(\mathcal{Q}) = 0 \quad (3.8.59)$$

となり, ちょうど調和振動子の時間に依存しない Schrödinger 方程式と同じ形の式となる. 従って, N_k を定数として $h(\mathcal{Q})$ が

$$h(\mathcal{Q}) = N_k H_k(\mathcal{Q}) e^{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}^2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.8.60)$$

と求まる. ここで, H_k は k 次の Hermite 多項式である. このとき,

$$2k + 1 = \frac{4m}{\xi\gamma} \left(\epsilon - i\frac{\alpha}{2} \right) \quad (3.8.61)$$

が成り立つ. 式 (3.8.61) から, ϵ が

$$\epsilon = \frac{\xi\gamma}{4m} (2k + 1) + i\frac{\alpha}{2} \quad (3.8.62)$$

と求まる. 式 (3.8.60) は式 (3.8.57) を用いて q で書き換えると,

$$h(q) = N_k H_k \left(\sqrt{\xi} q \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \xi q^2 \right] \quad (3.8.63)$$

となる. 式 (3.8.63) を式 (3.8.55) に代入することで, $g(q)$ が

$$g(q) = N_k H_k \left(\sqrt{\xi} q \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\xi + i\frac{2m\alpha}{\gamma} \right) q^2 \right] \quad (3.8.64)$$

と求まる. また, 式 (3.8.62) を式 (3.8.53) に代入することで, $T(t)$ が

$$T(t) = T_0 \exp \left[\left\{ \frac{\xi\gamma}{4m} (2k + 1) + i\frac{\alpha}{2} \right\} t \right] \quad (3.8.65)$$

と求まる.

以上のことから, 式 (3.8.64) と式 (3.8.65) を式 (3.8.49) に代入することで, 偏微分方程式 (3.6.9) の特殊解 $\mathcal{G}_k(q, t)$ が

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_k(q, t) &= T_0 N_k H_k \left(\sqrt{\xi} q \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\xi + i \frac{2m\alpha}{\gamma} \right) q^2 \right] \\ &\quad \times \exp \left[\left\{ \frac{\xi\gamma}{4m} (2k+1) + i \frac{\alpha}{2} \right\} t \right] \end{aligned} \quad (3.8.66)$$

と求まる.

3.8.6 偏微分方程式 (3.6.9) の一般解の導出

ここでは第3.8.5項で導出した偏微分方程式 (3.6.9) の特殊解 (3.8.66) を用いることにより, その一般解を導出する. ただし, 第3.8.5項と同様に $\xi = (1 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2)^{1/2} > 0$ の場合を考える. (本研究では, $\xi = 0$ の場合と $\xi < 0$ の場合の一般解 $G(q, t)$ については, $\xi > 0$ の場合の一般解 $G(q, t)$ から ansatz を置くことで導いた.)

式 (3.6.9) の一般解 $G(q, t)$ は A_k を重ね合わせ係数として, 式 (3.8.66) を用いることで

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mathcal{G}_k(q, t) \\ &= T_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\xi + i \frac{2m\alpha}{\gamma} \right) q^2 \right] \exp \left[\left(\xi + i \frac{2m\alpha}{\gamma} \right) \frac{\gamma}{4m} t \right] \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} A_k N_k \exp \left[\frac{\xi\gamma}{2m} tk \right] H_k \left(\sqrt{\xi} q \right) \end{aligned} \quad (3.8.67)$$

となる. 式 (3.8.67) は $t = 0$ のとき,

$$\begin{aligned} G(q, 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \mathcal{G}_k(q, 0) \\ &= T_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\xi + i \frac{2m\alpha}{\gamma} \right) q^2 \right] \sum_{k=0}^{\infty} A_k N_k H_k \left(\sqrt{\xi} q \right) \end{aligned} \quad (3.8.68)$$

となる.

式 (3.8.47) と式 (3.8.68) から,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k N_k H_k(\sqrt{\xi} q) = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{l!}} e^{-i\frac{1}{2}\beta} q^l e^{\frac{1}{2}(\xi + i\frac{2m\alpha}{\gamma})q^2} \quad (3.8.69)$$

となる. 式 (3.8.69) から, $A_k N_k$ を求める. 関係式

$$f(q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(\sqrt{\xi} q), \quad \xi \neq 0, \quad |\arg \sqrt{\xi}| < \frac{\pi}{4}, \quad (3.8.70a)$$

$$c_k = \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi q^2} f(q) H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.70b)$$

を用いると, $A_k N_k$ は

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{l!}} e^{-i \frac{l}{2} \beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^l e^{-\frac{1}{2}(\xi - i \frac{2m\alpha}{\gamma})q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.71)$$

と求まる. 実際に, 公式 (文献 [49] の p503 の 8 番を参照¹⁸)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi q^2} H_m(\sqrt{\xi} q) H_n(\sqrt{\xi} q) dq = \frac{1}{\sqrt{\xi}} 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}, \quad |\arg \sqrt{\xi}| < \frac{\pi}{4} \quad (3.8.72)$$

を用いることで式 (3.8.70) が成り立つことが確かめられる.

いま, Λ と Λ^* を,

$$\Lambda := \xi + i \frac{2m\alpha}{\gamma}, \quad \Lambda^* := \xi - i \frac{2m\alpha}{\gamma} \quad (3.8.73)$$

と定義する. ただし, 式 (3.6.12) と式 (3.8.73) から $\Lambda = e^\zeta$, $\Lambda^* = e^{-\zeta}$ であることに注意する. 以下では計算の都合上, e^ζ と $e^{-\zeta}$ の代わりに Λ と Λ^* を用いることにする. 式 (3.8.73) から,

$$\Lambda + \Lambda^* = 2\xi, \quad |\Lambda|^2 = \xi^2 + \frac{4m^2\alpha^2}{\gamma^2} = 1, \quad 2\xi\Lambda - \Lambda^2 = 1 \quad (3.8.74)$$

であることがわかる.

いま,

$$\frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) = \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right), \quad (3.8.75a)$$

$$\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} = -\frac{\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right)}{\cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} \quad (3.8.75b)$$

が成り立つ.

¹⁸公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 x^2} H_m(cx) H_n(cx) dx = \frac{2^n n! \sqrt{\pi}}{c} \delta_{mn}, \quad |\arg c| < \frac{\pi}{4}$$

が成立する.

式 (3.8.67) と式 (3.8.71) は式 (3.8.73) を用いるとそれぞれ

$$G(q, t) = T_0 \exp \left[-\frac{\Lambda}{2} q^2 \right] \exp \left[\Lambda \frac{\gamma}{4m} t \right] \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} A_k N_k \exp \left[\frac{\xi \gamma}{2m} t k \right] H_k \left(\sqrt{\xi} q \right), \quad (3.8.76)$$

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{l!}} e^{-i\frac{1}{2}\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^l e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.77)$$

のように書ける.

以下では, 初期条件 (3.8.47) を具体的に選んだ場合 (l を指定した場合) の一般解 $G(q, t)$ を求める. 各々の l の場合の $A_k N_k$ を実際に求めて, それを式 (3.8.76) に代入することで, 一般解 $G(q, t)$ を求める. 特に, $l = 0, 1, 2, 3, 4$ と選んだ場合をそれぞれ計算する. その際, $\xi = \Lambda^*/2$ が成り立つような実定数 (m, γ, α) の組は存在しないため,

$$\xi \neq \frac{\Lambda^*}{2} \quad (3.8.78)$$

が成り立つことに注意する.

$l = 0$ の場合の一般解

式 (3.8.77) は $l = 0$ の場合

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.79)$$

となる. 式 (3.8.79) は $k = 2s$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s} N_{2s} = \frac{1}{T_0} \frac{\sqrt{\xi}}{4^s (2s)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.80)$$

となる. 公式 (文献 [49] の P502 の 4 番を参照¹⁹)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aq^2} H_{2s}(\sqrt{\xi}q) dq = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2s)!}{s!} \left(\frac{\xi - a}{a}\right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.81)$$

を用いると, 式 (3.8.80) の右辺の積分が

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Lambda^*}{2}q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi}q) dq = \sqrt{\pi}(2\Lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{(2s)!}{s!} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.82)$$

となる. ここで, 式 (3.8.74) を用いた. 式 (3.8.82) を式 (3.8.80) に代入すると, $A_{2s}N_{2s}$ が

$$A_{2s}N_{2s} = \frac{\sqrt{\xi}}{T_0} (2\Lambda)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.83)$$

と求まる. 一方, 公式 (文献 [49] の P502 の 5 番を参照²⁰)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aq^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) dq = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.84)$$

を用いることで, 式 (3.8.79) は $k = 2s + 1$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s+1}N_{2s+1} = 0 \quad (3.8.85)$$

となる. 式 (3.8.85) を式 (3.8.76) に代入すると, 和の添え字 k が奇数の場合の項は全て 0 になり, 和の添え字 k が偶数の場合の項のみ残ることがわかる. 従って, 式 (3.8.76) は

$$G(q, t) = T_0 e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m}t} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}N_{2s} e^{\frac{\xi\gamma}{m}ts} H_{2s}(\sqrt{\xi}q) \quad (3.8.86)$$

¹⁹公式 ($\text{Re} a > 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} H_{2m}(bx) H_{2n}(cx) dx \\ &= (2m)!(2n)! \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{(m-k)!(n-k)!(2k)!} \left(\frac{b^2 - a}{a}\right)^{m-k} \left(\frac{c^2 - a}{a}\right)^{n-k} \left(\frac{2bc}{a}\right)^{2k} \end{aligned}$$

は $n = 0, b = \sqrt{\xi}, x = q$ と置くと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-aq^2} H_{2m}(\sqrt{\xi}q) dq = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2m)!}{m!} \left(\frac{\xi - a}{a}\right)^m$$

となる.

²⁰公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} H_{2m}(bx) H_{2n+1}(cx) dx = 0$$

が成立する.

となる. 式 (3.8.86) に式 (3.8.83) を代入すると,

$$G(q, t) = \sqrt{\xi}(2\Lambda)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{\Lambda\frac{\gamma}{4m}t} \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi}q) \quad (3.8.87)$$

となる. 公式 (文献 [49] の P708 の 4 番を参照²¹)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} H_{2s}(\sqrt{\xi}q) = (1+4t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right], \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (3.8.88)$$

を用いると, 式 (3.8.87) の和は

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi}q) \\ &= \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right], \quad \left| \frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right| < \frac{1}{2} \rightarrow e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} < 2 \end{aligned} \quad (3.8.89)$$

となる. 式 (3.8.87) に式 (3.8.89) を代入すると, 母関数 $G(q, t)$ が,

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \sqrt{\xi}(2\Lambda)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{\Lambda\frac{\gamma}{4m}t} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right] \\ &= \sqrt{\xi}(2\Lambda)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m}t} e^{i\frac{\alpha}{2}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left[\left(-\frac{\Lambda}{2} + \frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \end{aligned} \quad (3.8.90)$$

と求まる. ここで, 式 (3.8.73) から得られる関係式

$$e^{\Lambda\frac{\gamma}{4m}t} = e^{\frac{\xi\gamma}{4m}t} e^{i\frac{\alpha}{2}t} \quad (3.8.91)$$

²¹公式

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_{2m+n}(x) = (1+4t)^{-\frac{n+1}{2}} \exp \left[\frac{4tx^2}{1+4t} \right] H_n \left(\frac{x}{\sqrt{1+4t}} \right), \quad |t| < \frac{1}{2}$$

は $n=0$, $x = \sqrt{\xi}q$ と置くと,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_{2m}(\sqrt{\xi}q) = (1+4t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right], \quad |t| < \frac{1}{2}$$

となる.

を用いた. 式 (3.8.90) は

$$(2\Lambda)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.8.92)$$

$$\exp \left[\left(-\frac{\Lambda}{2} + \frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \quad (3.8.93)$$

を用いると,

$$G(q, t) = \sqrt{\xi} e^{i\frac{\alpha}{2}t} \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \quad (3.8.94)$$

となる. 式 (3.8.94) は $t = 0$ のとき,

$$G(q, 0) = \sqrt{\xi} \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda^* + \Lambda) \right\}^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad (3.8.95)$$

となり, $l = 0$ の場合の式 (3.8.47) を満たす.

式 (3.8.94) は式 (3.8.75) を用いると

$$G(q, t) = \sqrt{\xi} e^{i\frac{\alpha}{2}t} \left\{ \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right)}{2 \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} q^2 \right] \quad (3.8.96)$$

と書ける. (式 (3.8.87) の和が収束するためには, 式 (3.8.89) から $\exp [\xi\gamma t/m] < 2$ でなければならない. しかしながら, 偏微分方程式 (3.6.9) の一般解 (3.8.96) は $\exp [\xi\gamma t/m] \geq 2$ の場合も解として成立する.)

$l = 1$ の場合の一般解

式 (3.8.77) は $l = 1$ の場合

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} e^{-i\frac{\beta}{2}} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.97)$$

となる. 式 (3.8.97) は $k = 2s + 1$ と添え字を置き換えると,

$$A_{2s+1} N_{2s+1} = \frac{1}{T_0} e^{-i\frac{\beta}{2}} \frac{\sqrt{\xi}}{2^{2s+1} (2s+1)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.98)$$

となる. 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} q e^{-aq^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) dq = \frac{\sqrt{\xi}}{a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2s+1)!}{s!} \left(\frac{\xi - a}{a} \right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.99)$$

を用いると, 式 (3.8.98) の右辺の積分が,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) dq = 2\sqrt{\xi} \Lambda \sqrt{2\pi\Lambda} \frac{(2s+1)!}{s!} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^s \quad (3.8.100)$$

となる. ここで, 式 (3.8.74) を用いた. 式 (3.8.100) を式 (3.8.98) に代入すると, $A_{2s+1}N_{2s+1}$ が

$$A_{2s+1}N_{2s+1} = \sqrt{2} \frac{\xi}{T_0} e^{-i\frac{\beta}{2}} \Lambda^{\frac{3}{2}} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*}\right)^s \quad (3.8.101)$$

と求まる. 一方, 公式 (文献 [49] の P502 の 4 番を参照²²)

$$\int_{-\infty}^{\infty} q e^{-aq^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.102)$$

を用いることで, 式 (3.8.97) は $k = 2s$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s}N_{2s} = 0 \quad (3.8.103)$$

となる. 式 (3.8.103) を式 (3.8.76) に代入すると, 和の添え字 k が偶数の場合の項は全て 0 になり, 和の添え字 k が奇数の場合の項のみ残ることがわかる. 従って, 式 (3.8.76) は

$$G(q, t) = T_0 e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{(\Lambda+2\xi)\frac{\gamma}{4m}t} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1}N_{2s+1} e^{\frac{\xi\gamma}{m}ts} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) \quad (3.8.104)$$

となる. 式 (3.8.104) に式 (3.8.101) を代入すると,

$$G(q, t) = \sqrt{2}\xi e^{-i\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{(\Lambda+2\xi)\frac{\gamma}{4m}t} \Lambda^{\frac{3}{2}} \times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^s H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) \quad (3.8.105)$$

²²公式 ($\text{Re } a > 0$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} H_{2m+1}(bx) H_{2n+1}(cx) dx \\ &= (2m+1)!(2n+1)! \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{1}{(m-k)!(n-k)!(2k+1)!} \left(\frac{b^2-a}{a}\right)^{m-k} \left(\frac{c^2-a}{a}\right)^{n-k} \left(\frac{2bc}{a}\right)^{2k+1} \end{aligned}$$

は $n = 0, b = \sqrt{\xi}, x = q$ と置くと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q e^{-aq^2} H_{2m+1}(\sqrt{\xi} q) dq = \frac{\sqrt{\xi}}{a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2m+1)!}{m!} \left(\frac{\xi-a}{a}\right)^m$$

となる.

となる. 公式 (文献 [49] の P708 の 4 番を参照²³)

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) = 2\sqrt{\xi}(1+4t)^{-\frac{3}{2}}q \exp\left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t}\right], \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (3.8.106)$$

を用いると, 式 (3.8.105) の和は

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^s H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) = 2\sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^{-\frac{3}{2}} q \exp\left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}\right] \quad (3.8.107)$$

となる. 式 (3.8.107) を用いると, 式 (3.8.105) は

$$G(q, t) = \xi^{\frac{3}{2}} e^{-i\frac{\beta}{2}t} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{(\Lambda-\xi)\frac{\gamma}{4m}t} \times (2\Lambda)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^{-\frac{3}{2}} q \exp\left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}\right] \quad (3.8.108)$$

となる. ここで, 関係式

$$(\Lambda - \xi) \frac{\gamma}{4m}t = i\frac{\alpha}{2}t, \quad (3.8.109)$$

$$(2\Lambda)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left\{\frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t}\right)\right\}^{-\frac{3}{2}} \quad (3.8.110)$$

と式 (3.8.93) を用いると, 式 (3.8.108) は

$$G(q, t) = \xi^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{\beta}{2}t} \left\{\frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t}\right)\right\}^{-\frac{3}{2}} q \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}\right) q^2\right] \quad (3.8.111)$$

となる. 式 (3.8.111) は $t = 0$ のとき,

$$G(q, 0) = \xi^{\frac{3}{2}} e^{-i\frac{\beta}{2}t} \left\{\frac{1}{2} (\Lambda^* + \Lambda)\right\}^{-\frac{3}{2}} q = e^{-i\frac{\beta}{2}t} q \quad (3.8.112)$$

²³公式

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_{2m+n}(x) = (1+4t)^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left[\frac{4tx^2}{1+4t}\right] H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1+4t}}\right), \quad |t| < \frac{1}{2}$$

は $n = 1$, $x = \sqrt{\xi}q$ と置くと,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_{2m+1}(\sqrt{\xi}q) = 2\sqrt{\xi}(1+4t)^{-\frac{3}{2}}q \exp\left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t}\right], \quad |t| < \frac{1}{2}$$

となる.

となり, $l = 1$ の場合の式 (3.8.47) を満たす.

式 (3.8.111) は式 (3.8.75) を用いると

$$G(q, t) = \xi^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{\beta}{2}} \left\{ \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m} t \right) \right\}^{-\frac{3}{2}} q \exp \left[\frac{\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m} t \right)}{2 \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m} t \right)} q^2 \right] \quad (3.8.113)$$

と書ける.

$l = 2$ の場合の一般解

式 (3.8.77) は $l = 2$ の場合

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.114)$$

となる. 式 (3.8.114) は $k = 2s$ と添え字を置き換えると,

$$A_{2s} N_{2s} = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{4^s (2s)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq \quad (3.8.115)$$

となる. 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-aq^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq = \sqrt{\pi} a^{-\frac{3}{2}} \frac{(2s)!}{s!} \left(\frac{1}{2} + \frac{s\xi}{\xi - a} \right) \left(\frac{\xi - a}{a} \right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.116)$$

を用いると, 式 (3.8.115) の右辺の積分が,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq = \sqrt{\pi} \sqrt{2} \Lambda^{\frac{3}{2}} \frac{(2s)!}{s!} \left(1 + 4 \frac{s\xi}{\Lambda} \right) \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \quad (3.8.117)$$

となる. ここで, 式 (3.8.74) を用いた. 式 (3.8.117) を式 (3.8.115) に代入すると, $A_{2s} N_{2s}$ が

$$A_{2s} N_{2s} = \frac{\sqrt{\xi}}{T_0} e^{-i\beta} \left\{ \Lambda^{\frac{3}{2}} \frac{1}{s!} + 4 \Lambda^{\frac{1}{2}} \xi \frac{1}{(s-1)!} \right\} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \quad (3.8.118)$$

と求まる. 一方, 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-aq^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) dq = 0 \quad (3.8.119)$$

を用いることで, 式 (3.8.114) は $k = 2s + 1$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s+1} N_{2s+1} = 0 \quad (3.8.120)$$

となる. 式 (3.8.120) を式 (3.8.76) に代入すると, 和の添え字 k が奇数の場合の項は全て 0 になり, 和の添え字 k が偶数の場合の項のみ残ることがわかる. 従って, 式 (3.8.76) は

$$G(q, t) = T_0 e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s} N_{2s} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t s} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \quad (3.8.121)$$

となる. 式 (3.8.121) に式 (3.8.118) を代入すると,

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \sqrt{\xi} e^{-i\beta} e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} \\ &\times \left[\Lambda^{\frac{3}{2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \right. \\ &\left. + 4\Lambda^{\frac{1}{2}} \xi \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \right] \quad (3.8.122) \end{aligned}$$

となる. 式 (3.8.88) から得られる公式

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{(s-1)!} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) &= t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1+4t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right] \right\} \\ &= -2t (1+4t - 2\xi q^2) (1+4t)^{-\frac{5}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right], \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (3.8.123) \end{aligned}$$

を用いると, 式 (3.8.122) の和は

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right) e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} - 2\xi q^2 \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t}} \right] \quad (3.8.124) \end{aligned}$$

となる. 式 (3.8.124) と式 (3.8.88) を用いると, 式 (3.8.122) は

$$\begin{aligned}
& G(q, t) \\
&= \sqrt{\xi} e^{-i\beta} e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} \left\{ \Lambda^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\Lambda^{\frac{1}{2}} \xi \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right) e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} - 2\xi q^2 \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}} \right] \right\} \\
&= \sqrt{\xi} e^{i\frac{\alpha}{2} t} e^{-i\beta} \left\{ \Lambda \Lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - 2\xi \Lambda^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} - 2\xi q^2 \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} \right\} \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}} \right) q^2 \right] \\
&= \sqrt{\xi} e^{i\frac{\alpha}{2} t} e^{-i\beta} \left\{ \Lambda \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m} t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - 2\xi \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m} t} \left(\Lambda^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\xi\gamma}{4m} t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 4\xi^2 \left(\Lambda^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m} t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} q^2 \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m} t}} \right) q^2 \right] \quad (3.8.125)
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} = e^{i\frac{\alpha}{2} t} e^{\frac{\xi\gamma}{4m} t}, \quad \frac{1}{\Lambda^*} \Lambda^{\frac{3}{2}} = \Lambda^{\frac{5}{2}} \quad (3.8.126)$$

と式 (3.8.93) を用いた. 式 (3.8.125) の中括弧 $\{$ } 中の式は関係式

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m} t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m} t} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.8.127)$$

$$\Lambda^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\xi\gamma}{4m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m} t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m} t} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (3.8.128)$$

$$\Lambda^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m} t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} = \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m} t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m} t} \right)^{-\frac{5}{2}} \quad (3.8.129)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} & \Lambda \left(\Lambda^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{4m}t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{1}{2}} - 2\xi\Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \left(\Lambda^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\xi\gamma}{4m}t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ & = -2 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.8.130)$$

$$4\xi^2 \left(\Lambda^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m}t} \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} q^2 = 4\xi^2 \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} q^2 \quad (3.8.131)$$

となる. 式 (3.8.130) と式 (3.8.131) を用いると, 式 (3.8.125) は

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \sqrt{\xi} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\beta} \left\{ -2 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & \quad \left. + 4\xi^2 \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} q^2 \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\ &= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\beta} \left[-\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{3}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \xi^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{5}{2}} q^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \end{aligned} \quad (3.8.132)$$

となる. 式 (3.8.132) は $t = 0$ のとき,

$$G(q, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta} \xi^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda^* + \Lambda) \right\}^{-\frac{5}{2}} q^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\beta} q^2 \quad (3.8.133)$$

となり, $l = 2$ の場合の式 (3.8.47) を満たす.

式 (3.8.132) は式 (3.8.75) を用いると

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \sqrt{\frac{\xi}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\beta} \left\{ -\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) + \frac{\xi^2}{\cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} q^2 \right\} \\ & \quad \times \left\{ \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^{-\frac{3}{2}} \exp \left[\frac{\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right)}{2 \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} q^2 \right] \end{aligned} \quad (3.8.134)$$

と書ける.

$l = 3$ の場合の一般解

式 (3.8.77) は $l = 3$ の場合

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-\frac{\Lambda^*}{2}q^2} H_k(\sqrt{\xi}q) dq \quad (3.8.135)$$

となる. 式 (3.8.135) は $k = 2s + 1$ と添え字を置き換えると,

$$A_{2s+1}N_{2s+1} = \frac{1}{T_0\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^{2s+1}(2s+1)!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-\frac{\Lambda^*}{2}q^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) dq \quad (3.8.136)$$

となる. 公式

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-aq^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) dq \\ &= \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}} \frac{(2s+1)!}{s!} \sqrt{\xi} \left(\frac{3}{2} + \frac{s\xi}{\xi-a} \right) \left(\frac{\xi-a}{a} \right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.8.137)$$

を用いると, 式 (3.8.136) の右辺の積分が,

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-\frac{\Lambda^*}{2}q^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) dq = \sqrt{\pi} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \frac{(2s+1)!}{s!} \sqrt{\xi} \left(\frac{3}{2} + 2\frac{s\xi}{\Lambda} \right) \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \quad (3.8.138)$$

となる. ここで, 式 (3.8.74) を用いた. 式 (3.8.138) を式 (3.8.136) に代入すると, $A_{2s+1}N_{2s+1}$ が

$$A_{2s+1}N_{2s+1} = \frac{\xi}{T_0\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{s!} + \frac{\xi}{\Lambda} \frac{1}{(s-1)!} \right) \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \quad (3.8.139)$$

と求まる. 一方, 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^3 e^{-aq^2} H_{2s}(\sqrt{\xi}q) dq = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.8.140)$$

を用いることで, 式 (3.8.135) は $k = 2s$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s}N_{2s} = 0 \quad (3.8.141)$$

となる. 式 (3.8.141) を式 (3.8.76) に代入すると, 和の添え字 k が偶数の場合の項は全て 0 になり, 和の添え字 k が奇数の場合の項のみ残ることがわかる. 従って, 式 (3.8.76) は

$$G(q, t) = T_0 e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{(\Lambda+2\xi)\frac{\gamma}{4m}t} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+1}N_{2s+1} e^{\frac{\xi\gamma}{m}ts} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) \quad (3.8.142)$$

となる. 式 (3.8.142) に式 (3.8.139) を代入すると,

$$\begin{aligned} G(q, t) &= \xi \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} e^{(\Lambda+2\xi)\frac{\gamma}{4m}t} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \\ &\quad \times \left[\frac{3}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^s H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{\Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^s H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) \right] \end{aligned} \quad (3.8.143)$$

となる. 式 (3.8.106) から得られる公式

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{(s-1)!} H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) \\
&= t \frac{\partial}{\partial t} \left\{ 2\sqrt{\xi}(1+4t)^{-\frac{3}{2}}q \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right] \right\} \\
&= -4t \left\{ 3q\sqrt{\xi}(1+4t) - 2q^3\xi^{\frac{3}{2}} \right\} (1+4t)^{-\frac{7}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi}{1+4t}q^2 \right], \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (3.8.144)
\end{aligned}$$

を用いると, 式 (3.8.143) の和は

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^s H_{2s+1}(\sqrt{\xi}q) \\
&= - \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right) e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \left\{ 3q\sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) - 2q^3\xi^{\frac{3}{2}} \right\} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} \\
&\quad \times \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} q^2 \right] \quad (3.8.145)
\end{aligned}$$

となる. 式 (3.8.145) と式 (3.8.107) を用いると, 式 (3.8.143) は

$$\begin{aligned}
& G(q, t) \\
&= \xi \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} e^{(\Lambda+2\xi)\frac{\gamma}{4m}t} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} q^2 \right] \\
&\quad \times \left[\frac{3}{2} \sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{3}{2}} q \right. \\
&\quad \left. - \Lambda \xi e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \left\{ 3q \sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) - 2q^3 \xi^{\frac{3}{2}} \right\} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} \right] \\
&= \xi \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} e^{(\Lambda-\xi)\frac{\gamma}{4m}t} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&\quad \times e^{\frac{3\xi\gamma}{4m}t} \left[-3\sqrt{\xi} e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} q \right. \\
&\quad \left. + 2\Lambda \xi^{\frac{5}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} q^3 \right] \\
&= \xi \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&\quad \times \left[-3\sqrt{\xi} \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} q \right. \\
&\quad \left. + \xi^{\frac{5}{2}} (2\Lambda)^{\frac{7}{2}} e^{\frac{7\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} q^3 \right] \tag{3.8.146}
\end{aligned}$$

となる. ここで, 計算の途中で関係式

$$\frac{3}{2} \sqrt{\xi} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) - 3\Lambda \xi^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} = -3\sqrt{\xi} e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right)$$

と式 (3.8.93) を用いた. 式 (3.8.146) は関係式

$$(2\Lambda)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{5}{2}}, \tag{3.8.147}$$

$$(2\Lambda)^{\frac{7}{2}} e^{\frac{7\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} = \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{7}{2}} \tag{3.8.148}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
G(q, t) &= \xi \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \left[-3\sqrt{\xi} \sinh\left(\frac{\xi\gamma}{2m}t\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{5}{2}} q \right. \\
&\quad \left. + \xi^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{7}{2}} q^3 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \left[-3\xi \sinh\left(\frac{\xi\gamma}{2m}t\right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{5}{2}} q \right. \\
&\quad \left. + \xi^3 \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{7}{2}} q^3 \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.8.149}$$

となる. 式 (3.8.149) は $t = 0$ のとき,

$$G(q, 0) = \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \xi^{\frac{7}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda^* + \Lambda) \right\}^{-\frac{7}{2}} q^3 = \frac{1}{\sqrt{3!}} e^{-i\frac{3}{2}\beta} q^3 \tag{3.8.150}$$

となり, $l = 3$ の場合の式 (3.8.47) を満たす.

式 (3.8.149) は式 (3.8.75) を用いると

$$\begin{aligned}
G(q, t) &= \sqrt{\frac{\xi}{3!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-i\frac{3}{2}\beta} \left\{ -3\xi \sinh\left(\frac{\xi\gamma}{2m}t\right) q + \frac{\xi^3}{\cosh\left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t\right)} q^3 \right\} \\
&\quad \times \left\{ \cosh\left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t\right) \right\}^{-\frac{5}{2}} \exp \left[\frac{\sinh\left(\frac{\xi\gamma}{2m}t\right)}{2 \cosh\left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t\right)} q^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.8.151}$$

と書ける.

$l = 4$ の場合の一般解

式 (3.8.77) は $l = 4$ の場合

$$A_k N_k = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{-2i\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^4 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_k(\sqrt{\xi} q) dq \tag{3.8.152}$$

となる. 式 (3.8.152) は $k = 2s$ と添え字を置き換えると,

$$A_{2s} N_{2s} = \frac{1}{T_0} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{-2i\beta} \frac{\sqrt{\xi}}{4^s (2s)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q^4 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq \tag{3.8.153}$$

となる. 公式

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} q^4 e^{-aq^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq \\ &= \sqrt{\pi} a^{-\frac{5}{2}} \frac{(2s)!}{s!} \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3\xi}{\xi - a} s + \frac{\xi^2}{(\xi - a)^2} s(s-1) \right\} \left(\frac{\xi - a}{a} \right)^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.8.154)$$

を用いると, 式 (3.8.153) の右辺の積分が,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} q^4 e^{-\frac{\Lambda^*}{2} q^2} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) dq \\ &= \sqrt{\pi} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \frac{(2s)!}{s!} \left\{ \frac{3}{4} + \left(\frac{6\xi}{\Lambda} \right) s + \left(\frac{4\xi^2}{\Lambda^2} \right) s(s-1) \right\} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \end{aligned} \quad (3.8.155)$$

となる. ここで, 式 (3.8.74) を用いた. 式 (3.8.155) を式 (3.8.153) に代入すると, $A_{2s} N_{2s}$ が

$$\begin{aligned} & A_{2s} N_{2s} \\ &= \frac{\sqrt{\xi}}{T_0 \sqrt{4!}} e^{-2i\beta} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \left\{ \frac{3}{4} \frac{1}{s!} + \frac{6\xi}{\Lambda} \frac{1}{(s-1)!} + \frac{4\xi^2}{\Lambda^2} \frac{1}{(s-2)!} \right\} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} \right)^s \end{aligned} \quad (3.8.156)$$

と求まる. 一方, 公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^4 e^{-aq^2} H_{2s+1}(\sqrt{\xi} q) dq = 0 \quad (3.8.157)$$

を用いることで, 式 (3.8.152) は $k = 2s + 1$ と添え字を置き換えると

$$A_{2s+1} N_{2s+1} = 0 \quad (3.8.158)$$

となる. 式 (3.8.158) を式 (3.8.76) に代入すると, 和の添え字 k が奇数の場合の項は全て 0 になり, 和の添え字 k が偶数の場合の項のみ残ることがわかる. 従って, 式 (3.8.76) は

$$G(q, t) = T_0 e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s} N_{2s} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t s} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \quad (3.8.159)$$

となる. 式 (3.8.159) に式 (3.8.156) を代入すると,

$$\begin{aligned}
G(q, t) &= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{-2i\beta} e^{-\frac{\Lambda}{2} q^2} e^{\Lambda \frac{\gamma}{4m} t} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \\
&\times \left[\frac{3}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \right. \\
&+ \left(\frac{6\xi}{\Lambda} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \\
&\left. + \left(\frac{4\xi^2}{\Lambda^2} \right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-2)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \right] \quad (3.8.160)
\end{aligned}$$

となる. 式 (3.8.88) から得られる公式

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{(s-2)!} H_{2s}(\sqrt{\xi} q) &= t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (1+4t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right] \right\} \\
&= 4t^2 \left\{ 3(1+4t)^2 - 12\xi(1+4t)q^2 + 4\xi^2 q^4 \right\} (1+4t)^{-\frac{9}{2}} \exp \left[\frac{4t\xi q^2}{1+4t} \right], \quad |t| < \frac{1}{2} \quad (3.8.161)
\end{aligned}$$

を用いると, 式 (3.8.160) の和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(s-2)!} \left(\frac{1}{4} \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^s H_{2s}(\sqrt{\xi} q) \\
&= \frac{1}{4} \Lambda^4 e^{8\frac{\xi \gamma}{4m} t} \left\{ 3 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^2 - 12\xi \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right) q^2 + 4\xi^2 q^4 \right\} \\
&\times \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} \right)^{-\frac{9}{2}} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi \gamma}{m} t}} \right] \quad (3.8.162)
\end{aligned}$$

となる. 式 (3.8.89), 式 (3.8.124), 式 (3.8.162) を用いると, 式 (3.8.160) は

$$\begin{aligned}
& G(q, t) \\
&= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-2i\beta} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{\Lambda}{2}q^2} \exp \left[\frac{\xi \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} q^2}{1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right] \\
&\quad \times \left[\frac{3}{4} e^{\frac{\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{1}{2}} - 3\xi\Lambda e^{\frac{5\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} - 2\xi q^2 \right) \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \xi^2 \Lambda^2 e^{\frac{9\xi\gamma}{4m}t} \left\{ 3 \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^2 - 12\xi \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) q^2 + 4\xi^2 q^4 \right\} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{9}{2}} \right] \\
&= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-2i\beta} (2\Lambda)^{\frac{5}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&\quad \times \left[3\Lambda^{-\frac{5}{2}} \left\{ \frac{1}{4} e^{-\frac{\xi\gamma}{m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^2 - \xi\Lambda \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \xi^2 \Lambda^2 e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right\} \Lambda^{\frac{5}{2}} e^{\frac{5\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 6\xi^2 \Lambda^{-\frac{5}{2}} \left\{ e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) - 2\xi\Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right\} \Lambda^{\frac{7}{2}} e^{\frac{7\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} q^2 \right. \\
&\quad \left. + 4\xi^4 \Lambda^{-\frac{5}{2}} \Lambda^{\frac{9}{2}} e^{\frac{9\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{9}{2}} q^4 \right] \quad (3.8.163)
\end{aligned}$$

となる. ここで, 計算の途中で式 (3.8.93) を用いた. 式 (3.8.127)~(3.8.129) と式 (3.8.127) から得られる関係式

$$\Lambda^{\frac{7}{2}} e^{\frac{7\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} = \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{7}{2}}, \quad (3.8.164)$$

$$\Lambda^{\frac{9}{2}} e^{\frac{9\xi\gamma}{4m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^{-\frac{9}{2}} = \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{9}{2}}, \quad (3.8.165)$$

$$e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) - 2\xi\Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} = -2 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right), \quad (3.8.166)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} e^{-\frac{\xi\gamma}{m}t} \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right)^2 - \xi\Lambda \left(1 + \frac{\Lambda}{\Lambda^*} e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \right) + \xi^2 \Lambda^2 e^{\frac{\xi\gamma}{m}t} \\
&= \left\{ \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^2 \quad (3.8.167)
\end{aligned}$$

を用いると、式 (3.8.163) は

$$\begin{aligned}
G(q, t) &= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-2i\beta} 2^{\frac{5}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&\quad \times \left[3 \left\{ \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^2 \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{5}{2}} \right. \\
&\quad \left. - 12\xi^2 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{7}{2}} q^2 \right. \\
&\quad \left. + 4\xi^4 \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right)^{-\frac{9}{2}} q^4 \right] \\
&= \sqrt{\xi} \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-2i\beta} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1 - e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}}{\Lambda^* + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{m}t}} \right) q^2 \right] \\
&\quad \times \left[3 \left\{ \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{5}{2}} \right. \\
&\quad \left. - 6\xi^2 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{7}{2}} q^2 \right. \\
&\quad \left. + \xi^4 \left\{ \frac{1}{2} \left(\Lambda^* e^{-\frac{\xi\gamma}{2m}t} + \Lambda e^{\frac{\xi\gamma}{2m}t} \right) \right\}^{-\frac{9}{2}} q^4 \right] \tag{3.8.168}
\end{aligned}$$

となる。式 (3.8.168) は $t = 0$ のとき、

$$G(q, 0) = \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{-2i\beta} \xi^{\frac{9}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda^* + \Lambda) \right\}^{-\frac{9}{2}} q^4 = \frac{1}{\sqrt{4!}} e^{-2i\beta} q^4 \tag{3.8.169}$$

となり、 $l = 4$ の場合の式 (3.8.47) を満たす。

式 (3.8.168) は式 (3.8.75) を用いると

$$\begin{aligned}
G(q, t) &= \sqrt{\frac{\xi}{4!}} e^{i\frac{\alpha}{2}t} e^{-2i\beta} \left[3 \left\{ \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^2 - 6 \sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \frac{\xi^2}{\cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} q^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi^4}{\left\{ \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^2} q^4 \right] \left\{ \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right) \right\}^{-\frac{5}{2}} \exp \left[\frac{\sinh \left(\frac{\xi\gamma}{2m}t \right)}{2 \cosh \left(\zeta + \frac{\xi\gamma}{2m}t \right)} q^2 \right] \tag{3.8.170}
\end{aligned}$$

と書ける。

3.8.7 $\sum_n^\infty |c_n(t)|^2 = 1$ が成り立つことの確認

ここでは、特に $\sum_n^\infty |c_{n,0}(t)|^2 = 1$ が成り立つことを実際に確認する。

いま, 実数 ξ' を

$$\xi' := (4m^2\alpha^2/\gamma^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8.171)$$

と定義する. ここで, $\xi = i\xi'$ である. また, 式 (3.6.12) を用いると,

$$\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m) = \xi \cosh(\xi\gamma t/2m) + i(2m\alpha/\gamma) \sinh(\xi\gamma t/2m) \quad (3.8.172)$$

が得られる.

式 (3.6.14) の絶対値 2 乗は (a) の場合に

$$|c_{n,0}(t)|^2 = \begin{cases} \frac{\{(n-1)!!\}^2}{n!} \xi' \{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^n [\xi'^2 + \{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^2]^{-\frac{1}{2}(n+1)} \\ \quad , n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.8.173)$$

となる. ここで, 式 (3.8.171) と $|\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)|^2 = \xi'^2 + \{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^2$ を用いた.

式 (3.6.15) の絶対値 2 乗は

$$|c_{n,0}(t)|^2 = \begin{cases} \frac{\{(n-1)!!\}^2}{n!} \frac{(\gamma t/2m)^n}{(1+\gamma^2 t^2/4m^2)^{(n+1)/2}}, n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.8.174)$$

となる.

式 (3.6.14) の絶対値 2 乗は (c) の場合に

$$|c_{n,0}(t)|^2 = \begin{cases} \frac{\{(n-1)!!\}^2}{n!} \xi \{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^n [\cosh(\xi\gamma t/2m)]^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2]^{-\frac{1}{2}(n+1)} \\ \quad , n = 0, 2, 4, \dots, \\ 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.8.175)$$

となる. ここで, 式 (3.8.172) と $|\cosh(\zeta + \xi\gamma t/2m)|^2 = \{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2$ を用いた.

公式の導出

ここでは,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.8.176)$$

が成り立つことを示す.

いま,

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n+1)(n!)^2} z^{2n+1}, \quad |z| \leq 1, \quad (3.8.177)$$

$$\frac{d}{dz} \arcsin(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad z \neq \pm 1 \quad (3.8.178)$$

が成り立つ. 式 (3.8.177) と式 (3.8.178) から,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad |z| < 1 \quad (3.8.179)$$

であることがわかる. 関係式

$$\begin{aligned} & (2n-1)!!2^n! \\ &= \{(2n-1)(2n-3)\cdots 1\} [(2n)\{2(n-1)\}\{2(n-2)\}\cdots (2)(1)] \\ &= \{(2n-1)(2n-3)\cdots 1\} \{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2\} \\ &= 2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdots (2)(1) = (2n)! \end{aligned} \quad (3.8.180)$$

を用いると

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \quad (3.8.181)$$

が得られる. 式 (3.8.181) を式 (3.8.179) に代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} z^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad |z| < 1 \quad (3.8.182)$$

となる. 式 (3.8.182) は x を正の実数として, $z^2 = x$ とおくと,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad 0 \leq x < 1 \quad (3.8.183)$$

となる. 以上のことから式 (3.8.176) が成り立つことが示された.

(a) の場合

式 (3.8.173) は n を $2n$ に置き換えたとき,

$$|c_{2n,0}(t)|^2 = \xi' \left[\xi'^2 + \{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left[\frac{\{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi'\gamma t/2m)\}^2} \right]^n \quad (3.8.184)$$

と書ける. 式 (3.8.184) の無限和は

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 \\ &= \xi' \left[\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left[\frac{\{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2} \right]^n \end{aligned} \quad (3.8.185)$$

となる. 式 (3.8.185) の右辺の無限和は, 公式 (3.8.176) を用いると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left[\frac{\{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2} \right]^n = \frac{1}{\xi'} \left[\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8.186)$$

となる. ここで, 関係式

$$1 - \frac{\{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2} = \frac{\xi'^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2}, \quad (3.8.187)$$

$$0 \leq \frac{\{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2}{\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2} < 1 \quad (3.8.188)$$

を用いた. 式 (3.8.186) を式 (3.8.185) に代入すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n,0}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 = 1 \quad (3.8.189)$$

が得られる.

(b) の場合

式 (3.8.174) は n を $2n$ に置き換えたとき,

$$|c_{2n,0}(t)|^2 = (1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left(\frac{\gamma^2 t^2 / 4m^2}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2} \right)^n \quad (3.8.190)$$

と書ける. 式 (3.8.190) の無限和は

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 = (1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left(\frac{\gamma^2 t^2 / 4m^2}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2} \right)^n \quad (3.8.191)$$

となる. 式 (3.8.191) の右辺の無限和は, 公式 (3.8.176) を用いると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n)!} \left(\frac{\gamma^2 t^2 / 4m^2}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2} \right)^n = (1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8.192)$$

となる. ここで, 関係式

$$1 - \frac{\gamma^2 t^2 / 4m^2}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2} = \frac{1}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2}, \quad (3.8.193)$$

$$0 \leq \frac{\gamma^2 t^2 / 4m^2}{1 + \gamma^2 t^2 / 4m^2} < 1 \quad (3.8.194)$$

を用いた. 式 (3.8.192) を式 (3.8.191) に代入すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n,0}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 = 1 \quad (3.8.195)$$

が得られる.

(c) の場合

式 (3.8.175) は n を $2n$ に置き換えたとき,

$$\begin{aligned} |c_{2n,0}(t)|^2 &= \xi \left[\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n!)} \left[\frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} \right]^n \end{aligned} \quad (3.8.196)$$

と書ける. 式 (3.8.196) の無限和は

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 &= \xi \left[\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n!)} \left[\frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} \right]^n \end{aligned} \quad (3.8.197)$$

となる. 式 (3.8.197) の右辺の無限和は, 公式 (3.8.176) を用いると,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(2n-1)!!\}^2}{(2n!)} \left[\frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} \right]^n \\ &= \frac{1}{\xi} \left[\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.8.198)$$

となる. ここで, 関係式

$$1 - \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} = \frac{\xi^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2}, \quad (3.8.199)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} = \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\cosh(\xi\gamma t/2m)\}^2 - 1 + 1 - 4m^2\alpha^2/\gamma^2} \\ &= \frac{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2}{\{\sinh(\xi\gamma t/2m)\}^2 + \xi^2} < 1 \end{aligned} \quad (3.8.200)$$

を用いた. 式 (3.8.198) を式 (3.8.197) に代入すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_{n,0}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n,0}(t)|^2 = 1 \quad (3.8.201)$$

が得られる.

式 (3.8.189), 式 (3.8.195), 式 (3.8.201) から $\sum_n |c_{n,0}(t)|^2 = 1$ が成り立つことが確かめられた. 同様の操作を行うことにより, 他の l の場合も $\sum_n |c_{n,l}(t)|^2 = 1$ が成り立つことが確かめられる.

3.8.8 $\gamma \rightarrow 0$ の場合の遷移確率の時間変化

ここでは, $\gamma \rightarrow 0$ 極限における遷移確率の時間変化を調べる. 以下では特に (c) の場合 ($\gamma < \gamma_*$ の場合) の $|c_{n,0}(t)|^2$ の時間変化を調べる.

初めに, 式 (3.8.171) で定義した ξ' は $\gamma \rightarrow 0$ 極限で

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \xi' = \infty \quad (3.8.202)$$

となり, 発散することがわかる. 式 (3.8.173) は $n = 0$ の時に

$$|c_{0,0}(t)|^2 = \xi' \left[\xi'^2 + \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.8.203)$$

と書ける. 式 (3.8.202) からわかるように, 式 (3.8.203) の $\gamma \rightarrow 0$ 極限は [] の中の ξ'^2 が $\{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^2$ に比べて十分大きくなるため

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |c_{0,0}(t)|^2 = \xi' (\xi'^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad (3.8.204)$$

となる. 同様に $n \neq 0$ の時の式 (3.8.173) の $\gamma \rightarrow 0$ 極限は

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |c_{n,0}(t)|^2 = \frac{\{(n-1)!!\}^2}{n!} (\xi')^{-n} \{\sin(\xi' \gamma t / 2m)\}^n = 0 \quad (3.8.205)$$

となる. 式 (3.8.204) と式 (3.8.205) から, $\gamma \rightarrow 0$ 極限において, 基底状態の遷移確率は任意の時刻で 1 となり, 励起状態の遷移確率は任意の時刻で 0 となることがわかる. 図 (3.9) は, 固定された値 $m = \omega = 1$ に対して, γ をそれぞれ $\gamma = 0$ と $\gamma = 0.5$ とした場合の $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している. 図 (9a) から, $\gamma = 0$ の場合には励起状態への遷移は起こらないことが示される. (赤線, 青線, 黒点線のグラフは, 全て重なって書かれていることに注意する.) 図 (9b) におけるグラフは

図 3.4 の図 (4a) におけるグラフと比べて、振幅と周期が小さいことがわかる。このため、 γ の値が小さくなるに従って、基底状態の遷移確率は 1 の周りを振動して、励起状態の遷移確率は 0 の周りを振動することがわかる。図 (9b) から、 γ の値がある限り、励起状態の遷移確率は 0 ではないことが示される。

以上のことから、 $\gamma \rightarrow 0$ 極限において、初期時刻における状態が基底状態である場合、時間が経過しても励起状態へ遷移しないことがわかる。また、 $\gamma \rightarrow 0$ 極限において、初期時刻における状態が励起状態である場合も同様に、

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |c_{n,l}(t)|^2 = \delta_{nl} \quad (3.8.206)$$

が成り立ち、時間が経過しても他の状態へ遷移しないことがわかる。

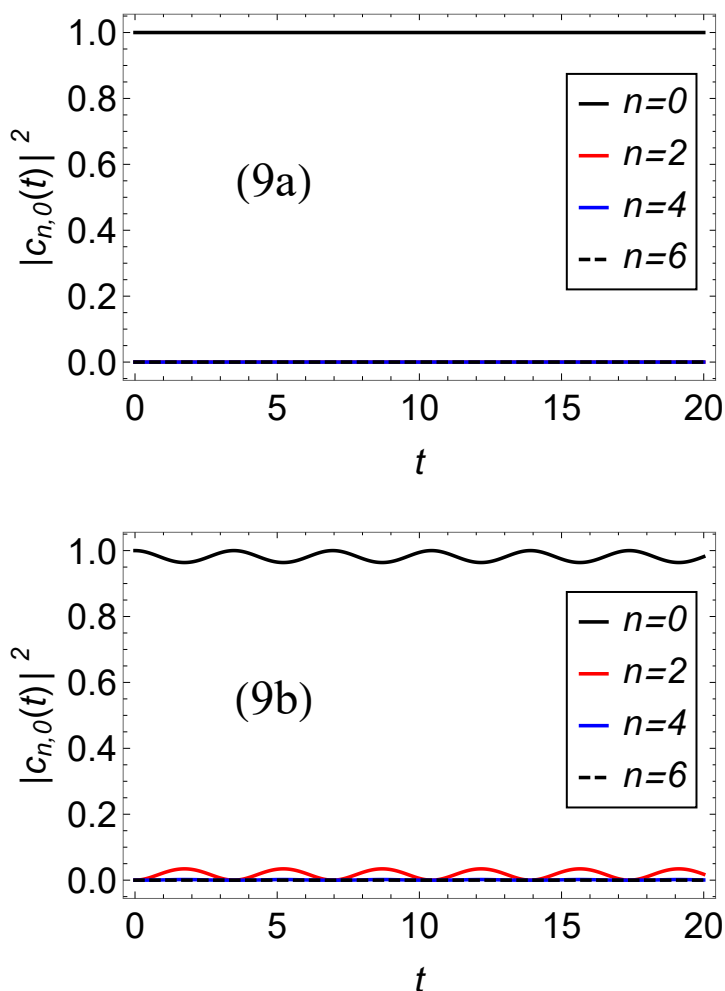


図 3.9: 図 (9a) と図 (9b) は固定された値 $m = \omega = 1$ に対して、 γ をそれぞれ $\gamma = 0$ と $\gamma = 0.5$ とした場合の $|c_{n,0}(t)|^2$ ($n = 0, 2, 4, 6$) のグラフを表している。

3.8.9 断熱近似をした場合の波動関数の導出

ここでは, 断熱近似をした場合の波動関数を導出する. エネルギー演算子 $\hat{E}_S(t)$ の時間変化がゆるやかであり, $\hat{E}_S(t + \Delta t) - \hat{E}_S(t)$ がエネルギー準位の差 $E_n - E_{n'}$ に比べてほとんど無視できるとする. このとき,

$$\frac{1}{E_n - E_{n'}} \langle n, t | \frac{D\hat{E}_S(t)}{Dt} | n', t \rangle_S \approx 0 \quad (3.8.207)$$

のような断熱近似を行うことができる. 式 (3.8.207) を式 (3.6.4) に用いると, $c_n(t)$ は定数 c_n となる. さらに, 初期条件 $c_n(0) = \delta_{nl}$ から $c_n = \delta_{nl}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) となる. この式を式 (3.6.6) に用いると

$$\begin{aligned} \psi(X, t) &= \sum_n \delta_{nl} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Theta_n t \right] \phi_n(X, t) \\ &= \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Theta_l t \right] \phi_l(X, t) \end{aligned} \quad (3.8.208)$$

が得られる. 断熱近似をした場合, 時間経過と共に, 異なるエネルギー準位間への遷移は起こらず, 波動関数の力学的位相のみが変化することがわかる.

いま, $\gamma = 0$ の場合に,

$$\Theta_l = -\hbar\omega \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad (3.8.209a)$$

$$\phi_l(X, t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \right) \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} X^2 \right] \quad (3.8.209b)$$

が成り立つ. 従って, 式 (3.8.208) は $\gamma = 0$ の場合に, 初期条件 $\psi(X, 0) = \phi_l(X, 0)$ を満たす通常の調和振動子の波動関数に帰着する.

第4章 結論

本論文では、初めに Bateman 模型に対する 2 つの量子化法を論じた。まず、擬 Bogoliubov 変換を用いることにより、Feshbach-Tikochinsky の量子化法で導かれる結果を簡潔に再現した。このとき得られるエネルギー固有値に下限はなく、力学的な視点から考えると、系の不安定性の問題が生じる。この問題を解決するために、Bateman 模型に虚数スケーリング量子化法を適用した。結果として得られるエネルギー固有値に下限が生じ、系の不安定性の問題が解決する。また、Schrödinger 方程式の特殊解 (2.4.23) は崩壊状態と成長状態に加えて、安定状態も表し得ることがわかった。この安定状態は、Feshbach-Tikochinsky の量子化法には現われなかったものである。

次に、Bateman 模型自体の問題点を指摘し、減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman 模型を提案した。また、この模型に基づき減衰調和振動子の量子化を行った。その際に、ハミルトニアン演算子 \hat{H} とは別に調和振動子に対するエネルギー演算子 \hat{E} を定義し、その固有値問題を解いた。このとき固有値 (3.4.18) は調和振動子の固有値に対して、時間経過と共に減衰する項を掛けたものとして得られた。また、固有関数 (3.5.15) は時間経過と共に、原点付近に収束することが分かった。その後、Schrödinger 方程式を解き、エネルギー固有状態間の遷移確率の時間変化を論じた。その際に、新たな臨界定数 $\gamma_* \equiv (\sqrt{5} - 1)m\omega$ を基準として、遷移確率の時間変化は 3 つの場合に分けられることを示した。以上の考察から、量子力学における減衰調和振動子は、エネルギー固有値が等しい間隔を保ちながら時間経過と共に指数関数的に減少し、それに応じてエネルギー固有状態間の遷移を伴うものと理解される。

第 2.2 節でも述べたように、減衰調和振動子のような散逸系において、系のハミルトニアンと力学的エネルギーは異なるものであるということを認識する必要がある。また、本研究のように、ハミルトニアン演算子とは別に、エネルギー演算子を定義し、減衰調和振動子の量子化を行う方法はこれまでに知られてこなかったものである。

今後の課題として, 遷移確率の振る舞いの物理的意味をより明確にすることや, 他の散逸系に本研究の手法を適用することが挙げられる. また, Jezierski と Kijowski が与えた熱力学的な変数を含むハミルトニアン [50] と本研究のハミルトニアン (3.3.41) の関係を調べることも興味深い課題である.¹

¹Jezierski と Kijowski は別の文脈で本研究のハミルトニアンと似た形のハミルトニアンを導いている. このハミルトニアンは熱力学的な変数を用いて表されるため, 本研究の模型が熱力学の視点から考察できるのかを調べる必要がある.

謝辞

本論文を執筆するにあたり、丁寧なご指導を頂いた、出口真一先生に深く感謝致します。また、有益なご助言を下された、藤川和男先生、仲滋文先生、三島隆先生、二瓶武史先生、三輪光嗣先生、大谷聡先生をはじめとする素粒子論研究室の先生方、先輩方に厚く謝意を申し述べます。さらに、日頃から様々な面で助言を下された鈴木隆史氏、岡野諭氏、中野邦彦氏に感謝致します。

参考文献

- [1] P. Caldirola, Forze non conservative nella meccanica quantistica, *Nuovo Cim.* 18 (1941) 393.
- [2] E. Kanai, On the quantization of the dissipative systems, *Progr. Theoret. Phys.* 3 (1948) 440.
- [3] H. Bateman, On dissipative systems and related variational principles, *Phys. Rev.* 38 (1931) 815.
- [4] W. E. Brittin, A note on the quantization of dissipative systems, *Phys. Rev.* 77 (1950) 396.
- [5] D. M. Greenberger, A critique of the major approaches to damping in quantum theory, *J. Math. Phys.* 20 (1979) 762.
- [6] H. Feshbach, Y. Tikochinsky, Quantization of the damped harmonic oscillator, *Transact. N.Y. Acad. Sci. Ser. II* 38 (1977) 44.
- [7] S. Deguchi, Y. Fujiwara, K. Nakano, Two quantization approaches to the Bateman oscillator model, *Ann. Phys.* 403 (2019) 34, arXiv:1807.04403 [quant-ph].
- [8] S. Deguchi, Y. Fujiwara, Quantization of the damped harmonic oscillator based on a modified Bateman Lagrangian, *Phys. Rev. A* 101 (2020) 022105, arXiv:2002.05435 [quant-ph].
- [9] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [10] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator, *Phys. Rep.* 80 (1981) 1.

- [11] M. Razavy, *Classical and Quantum Dissipative Systems*, 2nd Edition, World Scientific, Singapore, 2017.
- [12] E. Celeghini, M. Rasetti, G. Vitiello, Quantum dissipation, *Ann. Phys.* 215 (1992) 156.
- [13] Y. N. Srivastava, G. Vitiello, A. Widom, Quantum dissipation and quantum noise, *Ann. Phys.* 238 (1995) 200, arXiv:hep-th/9502044.
- [14] M. Blasone, E. Graziano, O. K. Pashaev, G. Vitiello, Dissipation and topologically massive gauge theories in the pseudo-euclidean plane, *Ann. Phys.* 252 (1996) 115, arXiv:hep-th/9603092.
- [15] M. Blasone, P. Jizba, Bateman's dual system revisited: quantization, geometric phase and relation with the ground-state energy of the linear harmonic oscillator, *Ann. Phys.* 312 (2004) 354, arXiv:quant-ph/0102128.
- [16] D. Chruściński, J. Jurkowski, Quantum damped oscillator I: dissipation and resonances, *Ann. Phys.* 321 (2006) 854, arXiv:quant-ph/0506007.
- [17] D. Chruściński, Quantum damped oscillator II: Bateman's Hamiltonian vs. 2D parabolic potential barrier, *Ann. Phys.* 321 (2006) 840, arXiv:quant-ph/0506091.
- [18] R. Banerjee, P. Mukherjee, A canonical approach to the quantization of the damped harmonic oscillator, *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 (2002) 5591, arXiv:quant-ph/0108055.
- [19] H. Majima, A. Suzuki, Quantization and instability of the damped harmonic oscillator subject to a time-dependent force, *Ann. Phys.* 326 (2011) 3000.
- [20] Y. Takahashi, H. Umezawa, Thermo field dynamics, *Collect. Phenom.* 2 (1975) 55.
- [21] H. Umezawa, *Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics*, American Institute of Physics, New York, 1993.

- [22] S. K. Pal, P. Nandi, B. Chakraborty, Connecting dissipation and noncommutativity: A Bateman system case study, *Phys. Rev. A* 97 (2018) 062110, arXiv:1803.03334 [quant-ph].
- [23] F. Bagarello, Dissipation evidence for the quantum damped harmonic oscillator via pseudo-bosons, *Theoret. Math. Phys.* 171 (2012) 497, arXiv:1106.4638 [math-ph].
- [24] J. Guerrero, F. F. López-Ruiz, V. Aldaya, F. Cossío, Symmetries of the quantum damped harmonic oscillator, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45 (2012) 475303, arXiv:1210.4058 [math-ph].
- [25] A. Pais, G. E. Uhlenbeck, On field theories with non-localized action, *Phys. Rev.* 79 (1950) 145.
- [26] M. Ostrogradsky, Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres, *Mem. Acad. St. Petersburg* VI (1850) 385.
- [27] R. P. Woodard, Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability, *Scholarpedia* 10 (2015) 32243, arXiv:1506.02210 [hep-th].
- [28] C. M. Bender, P. D. Mannheim, No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 110402, arXiv:0706.0207 [hep-th].
- [29] A. Mostafazadeh, Imaginary-scaling versus indefinite-metric quantization of the Pais-Uhlenbeck oscillator, *Phys. Rev. D* 84 (2011) 105018, arXiv:1107.1874 [hep-th].
- [30] N. Bogoliubov, On the theory of superfluidity, *J. Phys. (USSR)* 11 (1947) 23.
- [31] D. Stoler, Equivalence classes of minimum uncertainty packets, *Phys. Rev. D* 1 (1970) 3217.
- [32] J. L. Cieśliński, T. Nikiciuk, A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients, arXiv:0912.5296 [math-ph].

- [33] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Revised Edition (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1994).
- [34] E. H. Kerner, Note on the forced and damped oscillator in quantum mechanics, *Can. J. Phys.* 36 (1958) 371.
- [35] R. W. Hasse, On the quantum mechanical treatment of dissipative systems, *J. Math. Phys.* 16 (1975) 2005.
- [36] J. R. Choi, The Decay Properties of a Single-photon in Linear Media, *Chinese J. Phys.* 41 (2003) 257.
- [37] M. C. Baldiotti, R. Fresneda, D. M. Gitman, Quantization of the damped harmonic oscillator revisited, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 1630, arXiv:1005.4096 [quant-ph].
- [38] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 1964).
- [39] A. J. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, 1976).
- [40] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992).
- [41] M. Omote, S. Kamefuchi, On formal solutions to the Schrödinger equation, *Phys. Lett. A* 206 (1995) 273.
- [42] 亀淵 迪, 表 實, 量子力学特論, 朝倉書店 (2003).
- [43] M. Razavy, Quantum-mechanical irreversible motion of an infinite chain, *Can. J. Phys.* 57 (1979) 1731.
- [44] A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, W. Scheid, Open quantum systems, *Int. J. Mod. Phys. E* 03 (1994) 635, arXiv:quant-ph/0411189.
- [45] C. R. Galley, Classical mechanics of nonconservative systems, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 174301, arXiv:1210.2745 [gr-qc].

- [46] C. R. Galley, D. Tsang, L. C. Stein, The principle of stationary nonconservative action for classical mechanics and field theories, arXiv:1412.3082 [math-ph].
- [47] J. Polonyi, Classical and quantum effective theories, Phys. Rev. D 90 (2014) 065010, arXiv:1407.6526 [hep-th].
- [48] S. Deguchi, K. Nakano, T. Suzuki, Relativistic Lagrangians for the Lorentz-Dirac equation, Ann. Phys. 360 (2015) 539, arXiv:1501.04551 [physics.class-ph].
- [49] 大槻義彦監修, 室谷義昭訳, 新数学公式集 II 特殊関数, 丸善 (1992).
- [50] J. Jezierski, J. Kijowski, Une description hamiltonienne du frottement et de la viscosité, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série II, n° 4 (1985) 221.