

論文審査の結果の要旨

氏名：藤原 侑樹

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題名：減衰調和振動子の正準量子化

審査委員：（主査） 教授 出口 眞一
（副査） 教授 二瓶 武史 教授 三島 隆
准教授 三輪 光嗣 助教 大谷 聡

振動は理工系諸分野において重要な物理現象の1つである。最も簡単な振動は調和振動子（ばねにつながれたおもり）の運動である単振動であり、時間を引数とする三角関数で表される。ばねから受ける力以外に、おもりの速度に比例する抵抗力を受ける調和振動子は広く減衰調和振動子と呼ばれており、その運動は臨界定数を基準にして減衰振動、臨界減衰、過減衰に分類される（後者の2つは本質的に振動ではない）。本論文で提出者は減衰振動に注目しているが、このときのおもりの運動は時間を引数とする三角関数と時間発展と共に減少する指数関数の積で表される。

さて、上述の内容は古典力学の範囲の話であり、量子力学における調和振動子（量子化された調和振動子）は全く異なる描像をもつ。実際に調和振動子型ポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式を解くと、離散的かつ等間隔のエネルギースペクトルとそれに対応する固有関数族が得られる。この“等間隔”というのが調和振動子の特徴であり、エネルギー量子（光子、音子など）という概念に結び付いている。このように、量子力学における調和振動子は良く理解されており、量子力学の初歩的な教科書にもその内容が記載されている。以上のような背景のもと、量子力学における減衰調和振動子を考察することはごく自然な流れであり、実際に減衰調和振動子の量子化に関して数多くの研究がなされてきた。しかしながら、その内容は十分であるとは言い難く、議論の余地が多分に残されている。本論文において提出者は、古典力学（解析力学）の段階で減衰調和振動子の運動方程式を導く2種類のラグランジアン（Bateman ラグランジアンと修正された Bateman ラグランジアン）を与え、それら各々に基づき減衰調和振動子の正準量子化を実行している。特に、修正された Bateman ラグランジアンに基づく量子化においては、量子力学における減衰調和振動子の物理的描像が明らかになり、過去の研究では得られてこなかった興味深い結果が得られている。

本論文は、全4章から構成されている。それらの概要と評価は以下の通りである。

第1章は学位論文の序論であり、減衰調和振動子の量子化には大別して2つのアプローチがあることが述べられている。1つは、無限自由度の環境及びそれと相互作用する調和振動子を考え、環境に対する平均操作を通じて減衰調和振動子の量子化を論じるアプローチ。もう1つは、減衰調和振動子の解析力学を構成し、それを基に量子化を行うアプローチである。提出者は、本論文において後者を採用することを明言し、その長所として環境の自由度を直接扱う必要がないことを挙げている。以上を前提として、本論文で取り上げる次のような課題が述べられている。(1)減衰調和振動子のラグランジアンとして Bateman ラグランジアンを採用し、Feshbach と Tikochinsky の量子化法を再考する。(2)Bender 達により提唱された虚数スケール量子化法を適用して、エネルギーの正定値性を満たす量子化を行う。(3) Bateman ラグランジアン自体の問題点を指摘すると共に、その問題が生じない修正された Bateman ラグランジアンを提案する。(4)この新たなラグランジアンに基づき減衰調和振動子の量子化を実行し、量子力学における減衰調和振動子の物理的描像を明らかにする。

第2章は6節から成っており、Bateman ラグランジアンに基づく2つの量子化法、すなわち簡潔に再定式化された Feshbach-Tikochinsky の量子化法と、本論文で新たに考察された虚数スケール量子化法が論じられている。提出者は第1節で概要を述べたのち、第2節で Bateman ラグランジアンが振幅 x の減衰調和振動子の運動方程式と、振幅 y の増幅調和振動子の運動方程式を与えることを確認している。その後、 $x_{\pm} \equiv (x \pm iy)^{1/2}$ を座標変数に選ぶことで Bateman ラグランジアンを扱いやすい形に書き直し、ハミルトニアンを導いている。正準量子化は、 x_{\pm} とその共役運動量の間に交換関

係を置くことで実行され、素朴に定義される生成演算子と消滅演算子で書かれたハミルトニアン演算子が定義されている。問題は、このハミルトニアン演算子を対角化することであるが、提出者は第3節で生成・消滅演算子に対する非ユニタリーな Bogoliubov 変換 (擬 Bogoliubov 変換) を行うことでハミルトニアン演算子を対角化している。この部分は Feshbach と Tikochinsky が論じた $SU(1,1)$ Lie 代数を用いた対角化の再考であるが、提出者の方法は簡潔で見通しが良く、新たな成果として見るべきものがある。提出者が得たハミルトニアン演算子の固有値は Feshbach と Tikochinsky が得たものに一致しており、対応する Schrödinger 方程式の解には、崩壊状態を表すものと成長状態を表すものがある。ただし、系のエネルギーと同定されるハミルトニアン演算子の固有値の実部には下限が無く、その意味で力学系の安定性が保証されない。そこで提出者は第4節において、同様の問題が生じる Pais-Uhlenbeck 振動子模型に対してこの問題を回避する量子化の方法があることに注目している。Bender 達により提唱されたこの方法は、虚数スケール量子化法と呼ばれており、生成・消滅演算子に対する擬スクイーズ変換を行うことで問題を回避する方法である。提出者は虚数スケール量子化法を今回の模型に適用し、実際にハミルトニアン演算子の固有値の実部を正定値にできることを示している。これによりエネルギーに下限が生じ、力学系の安定性が保証される。また、この方法では、Schrödinger 方程式の解として崩壊状態を表すものと成長状態を表すものに加えて、安定状態を表すものが得られる。このような状態が出現することは大変興味深い。第5節は第2章のまとめと課題に充てられており、第6節は補遺として固有関数の考察に充てられている。

第3章は8節から成っており、修正された Bateman ラグランジアンに基づく減衰調和振動子の正準量子化が論じられている。提出者は、第1節で Bateman ラグランジアンが減衰調和振動子のみならず独立な増幅調和振動子を記述すること、そして第2章の量子化においては x_{\pm} が基本変数に選ばれていることを問題点として挙げている。これに対して提出者は、本章第2節において、修正された Bateman ラグランジアンを与え、これを基に x を独立変数、 y を従属変数に選ぶ定式化を行っている。このように、修正された Bateman ラグランジアンは減衰調和振動子のみを記述することができ、尚且つあらわに時間に依存しないという利点を持つ。このようなラグランジアンを見出したことは、本研究の特筆すべき成果である。第3節では、修正された Bateman ラグランジアンから得られる拘束条件を吟味した上でハミルトニアンが導かれている。また、このハミルトニアンは保存量であり、調和振動子の力学的エネルギーと系に生じる熱エネルギーの和であることが確認されている。減衰調和振動子の正準量子化は第4節で議論されており、提出者は上述のハミルトニアンに対応するハミルトニアン演算子以外に、調和振動子の力学的エネルギーに対応するエネルギー演算子を定義している。提出者は実際にエネルギー演算子の固有値問題を解き、エネルギー固有値として、通常の調和振動子のエネルギー固有値に、時間発展と共に減少する指数関数を掛けた式を導いている。この式は減衰調和振動子のエネルギー固有値として当を得た形をしているが、過去の文献には見当たらず、本研究で初めて導出されたものである。第5節で提出者は、Heisenberg 描像から Schrödinger 描像に移行し、減衰調和振動子のエネルギー固有関数を求めている。また、この固有関数の絶対値2乗の時間変化を調べ、古典力学における減衰調和振動子の時間変化と整合していることを指摘している。第6節は Schrödinger 方程式の解法に充てられている。提出者は、状態ベクトルを Schrödinger 描像におけるエネルギー固有ベクトルで展開し、その展開式を Schrödinger 方程式に代入することで展開係数に対する微分差分方程式を導いている。提出者は母関数を用いてこの方程式を解き、実際に時間の関数である展開係数を求めている。この過程は本研究において大変重要であり、提出者の工夫が見受けられる。さらに提出者は、展開係数の絶対値2乗である遷移確率に注目しており、エネルギー固有状態の間に遷移が起こることを明らかにしている。その際、新たな臨界定数が定義され、これを基準にして遷移確率の振る舞いが変わることも確認している。第7節は第3章のまとめと課題に充てられており、第8節 (補遺) には微分差分方程式の解法の詳細が記載されている。

第4章は結論に充てられており、そこでは本論文で論じられた事柄や研究成果、そして今後の課題が述べられている。特に提出者は、エネルギー固有状態間に起こる遷移の物理的内容を明確にすること、第3章で論じた手法を減衰調和振動子以外の散逸系の量子化に適用することを課題として挙げている。

以上のように提出者は、減衰調和振動子の量子化という数多くの研究者が取り組んできた問題に対して新たな取り組みを行い、従前の研究には無い興味深い幾つかの成果を得ている。特に修正された

Bateman ラグランジアンに基づく量子化において、量子力学における減衰調和振動子は、エネルギー固有値が等間隔を保ちながら時間発展と共に指数関数的に減少し、それに応じてエネルギー固有状態間の遷移を伴うものであると、その物理的描像を明らかにしている。このような成果は、量子力学及びその関連分野の発展に寄与するところが少なくない。

このことは、本論文の提出者が自立して研究活動を行い、又はその他の高度な専門的業務に従事するに必要な能力及びその基礎となる豊かな学識を有していることを示すものである。

よって本論文は、博士(理学)の学位を授与されるに値するものと認められる。

以 上

令和2年 2月 20日