

論文の内容の要旨

氏名：藤原 侑樹
博士の専攻分野の名称：博士（理学）
論文題名：減衰調和振動子の正準量子化

1. 序論

減衰調和振動子は、調和振動子に対して速度に比例する減衰の効果を加味した模型であり、散逸系の最も簡単な例の1つである。減衰調和振動子の量子化の研究は、多くの人々によってなされてきたが、減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いは未だに明確にされていない。

減衰調和振動子の量子化の方法として、大きく分けて2つの方法が知られている。一つ目の方法は、環境と相互作用する調和振動子を考え、環境を平均化することにより、量子化を行う方法である。二つ目の方法は、減衰調和振動子の運動方程式を与えるラグランジアンを設定して、それを基に量子化を行う方法である。この方法は環境の自由度を直接扱わなくて済むという長所があり、現象論的な方法と捉えることができる。本研究では、上述の二つ目の方法を採用して、減衰調和振動子の量子化を行う。

減衰調和振動子の運動方程式を与える代表的なラグランジアンとして、Caldirola-Kanai ラグランジアンと Bateman ラグランジアンの2つが知られている。Caldirola-Kanai ラグランジアンは、あらわに時間に依存するため、扱いが難しい面がある。一方、Bateman ラグランジアンは、あらわに時間に依存しないという望ましい性質を持つが、減衰調和振動子だけではなく、独立な増幅調和振動子も記述するという問題を持つ。Bateman ラグランジアンに基づく減衰調和振動子の量子化は、1977年に Feshbach と Tikochinsky によって、 $SU(1,1)$ Lie 代数を利用して行われた。しかし、得られるエネルギー固有値に下限がなく、系は不安定なものとなる。これに対して本論文では、虚数スケール量子化法と呼ばれる手法を減衰調和振動子の量子化に適用し、系の不安定性の問題を解決する。一方、上述のように Bateman ラグランジアンは、独立な増幅調和振動子も記述するという問題を持つ。これに対しては、減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman ラグランジアンを提案し問題を解決する。その後、このラグランジアンに基づき、減衰調和振動子の量子化を実行し、減衰調和振動子の量子力学的な振る舞いを明らかにする。

2. Bateman 模型に対する2つの量子化法

本章では、Bateman 模型に対する2つの量子化法を論じる。Bateman 模型は、Bateman ラグランジアン

$$L_B = m\dot{x}\dot{y} + \frac{\gamma}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y) - kxy \quad (1)$$

で定義される模型である。ここで、 m は質点の質量、 γ は減衰係数、 k はばね定数である。作用 $S_B = \int L_B dt$ を y で変分すると、減衰調和振動子の運動方程式 $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ が得られ、 x で変分すると、増幅調和振動子の運動方程式 $m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0$ が得られる。従って、式(1)は減衰調和振動子に加えて、それと独立な増幅調和振動子も記述することがわかる。

次に、式(1)に基づき正準量子化を行う。正準量子化は正準変数を対応する演算子に置き換え、Poisson 括弧から定まる交換関係を設定することで実行される。その際に、ハミルトニアン演算子を対角化するために、2つの量子化法を論じる。1つは Feshbach-Tikochinsky が導いた結果を簡潔に再現するものであり、消滅・生成演算子に対して擬 Bogoliubov 変換を適用する方法である。(ここで、擬は変換が非ユニタリーであることを意味する。) この方法では、ハミルトニアン演算子の固有値として $h_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega_-(n_1 - n_2) \pm i\hbar\lambda(n_1 + n_2 + 1)$ ($n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$) が得られる。ただし、 $\omega_- := \sqrt{\omega^2 - \gamma^2/4m^2}$ ($2m\omega > \gamma$)、 $\omega := \sqrt{k/m}$ 、 $\lambda := \gamma/2m$ である。固有値 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部はエネルギー固有値と解釈され、虚部は崩壊幅と解釈される。いま、 $h_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部に注目すると、 n_1 と n_2 の差の形になっている。このため、エネルギー固有値に下限はなく、系の安定性が保障されない。一方で、Schrödinger 方程式の特殊解は $|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp\left[-ih_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar\right]|\psi_{n_1, n_2}^{(\pm)}(0)\rangle$ のように書ける。指数関数部分の時間変化から、 $|\psi_{n_1, n_2}^{(+)}(t)\rangle$ は成長状態を表し、 $|\psi_{n_1, n_2}^{(-)}(t)\rangle$ は崩壊状態を表すことがわかる。

もう1つの量子化法は虚数スケール量子化法である。この方法は、消滅・生成演算子に対して虚数スケール変換とユニタリー変換の組み合わせを適用する方法である。虚数スケール変換はもともと、不安定な力学系を記述する Pais-Uhlenbeck 模型に対して Bender 達が提案した変換であり、これにより不安定性の問題が解決する。この方法を Bateman 模型に適用すると、ハミルトニアン演算子の固有値が $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)} := \hbar\omega_-(n_1 + n_2 + 1) \pm i\hbar\lambda(n_1 - n_2)$ のように得られる。いま、 $\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}$ の実部に注目すると、 n_1 と n_2 の和の形になっている。このためエネルギー固有値に下限が生じ、系の安定性が保障される。また、Schrödinger 方程式の特殊解は $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle := \exp\left[-i\check{h}_{n_1, n_2}^{(\pm)}t/\hbar\right]|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(0)\rangle$ のように書ける。指数関数部分の時間変化から、 $|\check{\psi}_{n_1, n_2}^{(\pm)}(t)\rangle$ は n_1 と n_2 の大小関係により、崩壊状態、成長状態、安定状態のいずれかを表すことがわかる。特に、安定状態は Feshbach-Tikochinsky の量子化法には現われず、虚数スケール量子化法においてのみ現われる。

3. 修正された Bateman 模型に基づく減衰調和振動子の正準量子化

Bateman ラグランジアンは減衰調和振動子に加えて、独立な増幅調和振動子も記述する。また、量子化の手順において、減衰振動の振幅と増幅振動の振幅の一次結合が基本的な力学変数に選ばれる。このため、第2章で論じた量子化は減衰調和振動子そのものを量子化しているのか疑問である。そこで本章では、減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman ラグランジアンを提案して、この問題を解決する。

Bateman ラグランジアンに含まれる x, y 以外に変数 ρ, σ, ν を導入し、式(1)に新たな項を加えることで、修正された Bateman ラグランジアンを

$$L_{\text{MB}} = L_{\text{B}} - \frac{1}{2}(\rho\dot{\sigma} - \dot{\rho}\sigma) - \frac{\gamma}{2m}\rho\sigma + \nu(\rho x - \sigma y) \quad (2)$$

のように構成する。修正された Bateman 模型は式(2)で定義される模型である。式(2)から力学変数 x, y, ρ, σ, ν に対する Euler-Lagrange 方程式を導き、それらを組み合わせることにより、減衰調和振動子の運動方程式 $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ と増幅調和振動子の運動方程式 $m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0$ に加えて、 $\nu = 0$, $2m\dot{\rho} - \gamma\rho = 0$, $2m\dot{\sigma} + \gamma\sigma = 0$ が得られる。変数 ν に対する Euler-Lagrange 方程式は $\rho x = \sigma y$ であるが、仮に x を独立変数とすると、 y は $y = (\rho/\sigma)x$ で定まる従属変数となる。いま、 $\rho x = \sigma y$ に上述の運動方程式の解を代入することで、 x と y の初期位相は $2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) を法として等しいことが示される。従って、式(2)で記述される系において、1つの振動項のみが存在することがわかる。

いま、式(2)に基づき正準形式を構成する。その際に、拘束条件は Dirac 括弧を定義して正準変数を減らすことで処理される。このとき得られるハミルトニアン H は系の全エネルギー（保存量）を表し、調和振動子の力学的エネルギー E と発生する熱エネルギー Q の和になっている。

正準量子化の手続きは、正準変数を対応する演算子に置換え、Dirac 括弧から定まる交換関係を設定することで実行される。その際に、ハミルトニアン演算子 \hat{H} とは別に、上述の力学的エネルギー E に対応するエネルギー演算子 \hat{E} を定義する。実際に、 \hat{E} の固有値問題を解くと、固有値 $E_n = \exp[-\gamma t/m] \times \hbar\omega(n + 1/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) が得られるが、 E_n は時間経過と共に等しい間隔を保ちながら減少することがわかる。対応する固有関数 $\phi_n(X, t)$ ($X := \sqrt{2}x$) の絶対値2乗は、規格化条件 $\int |\phi_n(X, t)|^2 dX = 1$ を保ちながら、時間経過と共に、原点の近傍において増加して、それ以外の領域では0に近づくことがわかる。特に、 $|\phi_0(X, t)|^2$ は時間経過と共にデルタ関数に近づく。

次に、Schrödinger 方程式 $i\hbar d|\psi(t)\rangle/dt = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ を解き、そこから予想される物理現象を考察する。この方程式に展開式 $|\psi(t)\rangle = \sum_n^\infty c_n(t) \exp[-i(\omega^2/\omega)(n + 1/2)t]|n, t\rangle_S$ を代入することで、展開係数 $c_n(t)$ に対する微分差分方程式が得られる。ここで、 $|n, t\rangle_S$ は \hat{E} の固有ベクトルであり、 $c_n(t)$ は規格化条件 $\sum_n^\infty |c_n(t)|^2 = 1$ と初期条件 $c_n(0) = \delta_{nl}$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) を満たす。実際に、母関数を用いた手法により、 l を指定した場合の $c_n(t)$ が求まる。遷移確率 $|c_n(t)|^2$ の時間変化を調べることで、物理現象としてエネルギー固有状態間の遷移が起こることがわかる。その際に、新たな臨界定数 $\gamma_* := (\sqrt{5} - 1)m\omega$ を基準として、時間発展に伴う遷移確率の振る舞いは3つの場合 (a) ($0 \leq \gamma < \gamma_*$), (b) $\gamma = \gamma_*$, (c) ($2m\omega >$) $\gamma > \gamma_*$ で異なることがわかる。具体的に、(a) の場合は遷移確率が t の周期関数として変化し、(b) の場合は遷移確率が t のべき関数として変化する。また、(c) の場合は遷移確率が t の指数関数として変化する。古典的な臨界定数 $2m\omega$ に加えて、量子化において新たな臨界定数 γ_* が現れることは、大変興味深い。また、固有関数 $\phi_n(X, t)$ の振る舞いを反映して、確率密度

$|\langle X|\psi(t)\rangle|^2$ の分散は時間経過と共に減少する。この結果は、粒子の存在確率が原点の近傍で増加し、それ以外の領域では減少していくことを意味しており、古典論における減衰調和振動子の振る舞いと整合している。

4. 結論

本論文では、初めに Bateman 模型に対する 2 つの量子化法を議論した。まず、擬 Bogoliubov 変換を用いることにより、Feshbach-Tikochinsky の量子化法で導かれる結果を簡潔に再現した。このとき得られるエネルギー固有値に下限はなく、系の不安定性の問題が生じる。この問題を解決するために、Bateman 模型に虚数スケール量子化法を適用した。結果として得られるエネルギー固有値に下限が生じ、系の不安定性の問題が解決する。また、Schrödinger 方程式の特殊解は崩壊状態と成長状態に加えて、安定状態も表し得ることがわかった。この状態は、Feshbach-Tikochinsky の量子化法には現われなかったものである。

次に、Bateman 模型自体の問題点を指摘し、減衰調和振動子のみを記述する修正された Bateman 模型を提案した。また、この模型に基づき減衰調和振動子の量子化を行った。その際に、ハミルトニアン演算子とは別に調和振動子に対するエネルギー演算子を定義し、その固有値問題を解いた。その後、Schrödinger 方程式を解き、エネルギー固有状態間の遷移確率の時間変化を論じた。以上の考察から、量子力学における減衰調和振動子は、エネルギー固有値が等しい間隔を保ちながら時間経過と共に指数関数的に減少し、それに応じてエネルギー固有状態間の遷移を伴うものと理解される。

今後の課題として、遷移確率の振る舞いの物理的意味をより明確にすることや、他の散逸系に本研究の手法を適用することなどが挙げられる。