論文審査の結果の要旨

氏名：横　溝　恭　平

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題名：　The conservativity problem between fragments of intermediate logics and its application.
(中間命題論理の論理断片間の保存性問題とその応用)

審査委員：　（主査）　教授　　志　村　立　矢
　　　　　　（副査）　教授　　吉　開　範　章　　　　教授　　善　本　　　潔
　　　　　　　　　　　教授　　利根川　　　聡　　　　東京工業大学准教授　　鹿　島　　　亮

数理論理学の分野での非古典論理の研究において、構成的な証明の概念を形式化した直観主義論理は最も基本的な対象である。直観主義論理に公理を追加した論理である中間論理をはじめ多くの論理の研究において、直観主義論理が持つ特有の性質やその類似をそれらの論理が持つかどうかは主要な興味となっている。

本研究では、中間論理の公理化に関する保存性 (conservativity) を対象としている。歴史的には保存性の研究は分離性 (separability) と呼ばれる性質の研究の一部として現れたが、本論文で得られた成果からは、保存性の概念は分離性の概念から抽出されたより基本的なものと考えることができる。

本研究の特徴としては、クリプキモデルによる方法と並ぶ基本的な意味論的な研究方法である代数的な方法による論理の分析を基礎に置いているところにある。分離性についての既存の研究においても代数的なアプローチは見られるが、分離性の概念と完全に対応する代数的な性質は得られていない。その一方で、保存性は定義が単純であり、対応する代数的な性質が得やすいという利点がある。

本論文の構成は以下の通りである。

第 1 章と第 2 章は論文の概要の説明と直観主義命題論理周辺の一般的な概念の定義に充てられている。第 3 章では、中間命題論理の論理記号を論理記号の集合 $\mathcal{S}$ に制限した体系 $\mathcal{S}$-論理を定義し、普遍代数の一般論の後 $\mathcal{S}$-論理に対応する $\mathcal{S}$-代数を与え、$\mathcal{S}$-代数の性質とこれらの間の完全性を統一的な方法で証明している。$\mathcal{S}$-代数はハイティング代数の一般化でありこの章の内容は類推が可能ではあるが、成書で $\mathcal{S}$-代数に特化した記述を持つものは少なく、要領よくまとめられた記述となっている。

第 4 章での主要な道具は Jankov の理論と Horn による $\mathcal{S} \cup \{\wedge\}$-代数の構成である。Jankov 論理式は $\mathcal{S}$-論理における証明不可能性と $\mathcal{S}$-代数の商代数への埋め込みとを結びつけるものであり、その定義と構成は保存性の概念との親和性が極めて高い。Horn による $\mathcal{S} \cup \{\wedge\}$-代数の構成は 1950 年代に直観主義命題論理の分離性を示すために用いられたものである。この構成は単純ではあるが、得られた $\mathcal{S} \cup \{\wedge\}$-代数自身の性質の研究は深く行なわれてこなかった。

4.3 節は分離性と保存性に関する Khomich と Wroński による結果の要約である。分離性の研究において Khomich は中間論理の族に適用できる一般的な結果を残している。そのうち、$\vee$ を含まない公理を持つ論理の族と 1 個の有限代数で特徴付けられる論理の族の分離性に関するものが重要である。一方保存性単独についての研究で Wroński は、どんな $\mathcal{S}$-論理式の集合についても Γ で公理化される中間論理 $\mathbf{H} + \Gamma$ で保存性が成立するための $\mathcal{S}$ の条件は $\wedge \in \mathcal{S}$ であることを証明した。

4.4 節は Wroński の保存性に関する結果に別証を与えている。Wroński の原論文の証明は概要のみで、その背景にあると考えられる理論についての説明はほとんどない。また $\mathcal{S} = \{\to, \wedge, \vee\}$ の場合については証明の概要さえも省略されている。本論文では、それも含めて完全な証明を与えるとともに、Jankov の理論と関

連付けた代数的な説明を与えており全体の理解を高めている。

4.5 節は本論文の最初の主要な結果である。

$\mathcal{S}$ 論理式の集合 Γ に対しては、$\mathcal{S}$-論理の完全性定理から Γ が恒真な $\mathcal{S}$-代数が埋め込み可能な Γ が恒真な $\mathcal{S}'$-代数が存在すれば、Γ により公理化される $\mathcal{S}$-論理と $\mathcal{S}'$-論理間の保存性が成立することがただちにわかる。本論文では Jankov 論理式の無限代数への拡張を定義することで、この条件が保存性を導く必要条件でもあることを証明した。これにより保存性の問題の成否は Γ が恒真となる $\mathcal{S}'$-代数の構成に帰着されたことになる。

一般の $\mathcal{S}'$ に対してはこの Γ が恒真となる $\mathcal{S}'$-代数の構成は知られていないが、$\wedge \in \mathcal{S}'$ のとき、Horn により構成された $\mathcal{S} \cup \{\wedge\}$-代数の最小性を示すことで、この $\mathcal{S} \cup \{\wedge\}$-代数における Γ の恒真性に帰着できることを証明した。これが本論文の 2 番目の結果である。保存性の問題は多くの場合において $\wedge \in \mathcal{S}'$ の条件を満たすので、これは十分に一般的で有用な定理となっている。

この節の意義は、保存性の問題の代数化と Horn による構成の重要性を確立させたことにある。代数化により抽象的な代数の理論の適用可能性が広がり、その対象が Horn の代数という具体的な構造に絞られたことは、今後の研究への寄与が大きい。

4.6 節では、Horn の代数の構成は元の代数の $\to$ 部分だけに依存していることに注目し、4.5 節の定理の系として Khomich の保存性に関するいくつかの定理を統一的に導けることを示している。Khomich はそれぞれの定理に個別に異なる証明を与えているので、これも代数的方法を中心に展開した本論文の方針の有効性を示している。

5 章は 4 章の結果を元に、新しい分離性を持つ論理の公理化を与えている。Gabbay-de Jongh による有限 m 分木で特徴付けられる論理は公理化には $\vee$ が必須であり、また有限の代数で特徴付けることもできないため、4 章で紹介した Khomich の一般論は適用できず、この論理の分離性の証明は既存の研究にない新しい方面を開拓することになる。

本章では、Gabbay-de Jongh の論理には分離性を持つ公理化がある有限 $\{\to, \vee\}$-代数の Jankov 論理式として与えられること、Gabbay-de Jongh の論理の公理化としてよく知られたものは分離性を持たないことを示している。この証明には 4 章で得られた保存性の判定条件が用いられるが、その前段階で Horn の構成による代数の商代数の構造に関する補題を示し証明の大幅な簡略化に成功している。

証明の主要部分は、公理化に用いられる Jankov 論理式を定義する代数の構造に強く依存している。この証明が他の公理化にも拡張可能かどうかは、分離性の研究にとって重要な問題であり、今後の研究の具体的な目標を与えたという意義がある。

6 章は hypersequent の体系に関するものである。

Avron は Dummett の論理と同等な hypersequent の体系 **GLC** および **GLCW** を与えている。後者はそれ自体はカット除去可能ではないが論理記号を $\to$ に制限したときはカット除去可能となるという奇妙な性質を持っている。

本論文では、4 章で得られた結果を基礎としてこれらの体系の分析を行なっている。まず、**GLCW** に対する公理化は保存性が成立しないことを指摘し、カット除去不能なことはこれからただちに導かれることを指摘した後、この体系は $\to$ と $\vee$ に制限してもカット除去可能という Avron の誤った主張に対する反例を与えている。

さらに、Ciabattoni と Ferrari による **GLC** の一般化 m-**GLC** について、その **GLCW** との類似である、m-**GLCW** を新たに定義し、m-**GLC** と m-**GLCW** が **GLC** と **GLCW** と同様の関係を持つことを証明した。この結果は、論理記号を制限したときに初めてカット除去が成立するという体系の存在が個別の特異なものではなく、論理の族の性質として理論的に導かれる可能性を示唆しており、hypersequent の体系の研究

の今後に対し一つの話題を与えていると考えられる。

本論文の結果自体は中間論理とその部分体系に対するものであるが、他の論理での保存性の研究においても代数的方法が有効であることを示唆しており、一般の非古典論理の研究の中で一定の価値を持つものと認められ、今後の発展が期待される。

公聴会における発表はよく準備されており、主要な結果の周辺に焦点を当てた内容を非専門家にも理解できるように構成されたものであった。質疑応答では専門的、非専門的な質問がいくつかあったが、専門的な内容の質問に対しては問題の所在を的確に示す形での応答をしており、他の質問についても、質問内容を十分に理解した上で明確な回答を行なっていた。

このことは，本論文の提出者が自立して研究活動を行い，又はその他の高度な専門的業務に従事するに必要な能力及びその基礎となる豊かな学識を有していることを示すものである。よって本論文は，博士（理学）の学位を授与されるに値するものと認められる。

以上

平成 30 年 2 月 15 日