

論文の内容の要旨

氏名：横 溝 恭 平

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題名：The conservativity problem between fragments of intermediate logics and its application
(中間命題論理の論理断片間の保存性問題とその応用)

1 研究の背景と目的

我々が普段数学で用いる論理の形式化である古典論理及び数学的直観主義を形式化した直観主義論理、またこれらの中間の証明力を持つ中間論理は、論理の性質を考察するため、長らく研究の対象とされてきた。その性質の一つとして、「保存性」と呼ばれる、中間論理における言語間の相互依存関係に注目した概念がある：

- 任意の証明可能な論理式 A に対し、それが言語 S によって構成されるならば、 S によって構成された論理式のみからなる証明が存在する。

換言すれば、言語の勝手な部分集合 S について、証明中に S の元でない言語の力を借りる必要がない、つまり言語間における相互依存関係が証明に関して存在しない状況を考察するといえる。

我々はこの保存性を、命題論理と呼ばれる単純な形式化について考察した。命題論理は数理論理学における形式化の1つであり、言語は変数の他 \rightarrow (if, then), \wedge (and), \vee (or), \neg (not) のみを用いる。従って命題論理はこれら四つの論理記号の相互関係を考察する対象と考えることができる。

保存性の研究は、類似した概念である separability と呼ばれる性質の形で行われてきた。separability は Wajsberg により定義され、1930年代には、Curry によって直観主義論理及び古典論理が separable であることの証明が与えられた。その後1960年代には Hosoi らにより有名な中間論理いくつかに対し、それらが separable であることの証明が与えられた。これらの結果はそれぞれ特定の中間論理に対しての成果である。これらの結果を踏まえ、1970から90年代には Khomich により、特に公理に \vee が用いられないような中間論理及び有限代数で定義可能な中間論理については一般的な結果が与えられた。

保存性単独についての先行研究としては1980年代、Wroński により、「どのような公理に対しても保存性が成り立つような S は何か」という問題が証明された。ただしこれは与えられた勝手な論理の公理化に対し、それが保存性を満たすかどうかという問に答えるものではなかった。

我々の目的はこれら現状と課題を踏まえ、中間論理の保存性に対して、以下を満たす一般的な条件を与えることである：

1. 公理に \vee が含まれ、かつ有限代数で定義できない論理に適用できる。
2. 与えられた勝手な中間論理及び $S \subseteq S'$ となる S, S' に対し、保存性が成り立つかを判定できる。

さらに、与えた一般的な条件の応用として、いくつかの具体的な中間論理について、その保存性を示す。

2 本研究の内容及び論文の構成

本論文は、以下の六章により構成される。

第一章 緒論

第二章 中間命題論理の定義と性質

第三章 中間命題論理の部分体系の定義と性質

第四章 保存拡大性の代数的特徴付け、および特殊な条件下での判定条件

第五章 Gabbay-de Jongh の論理の separability

第六章 Dummett の論理 LC と同等な hypersequent calculus の部分体系について

第一章では、本研究のキーワード「中間論理」「保存性」に関する背景と過去の結果、論文の構成について述べる。

第二章では、中間命題論理の定義と性質、また本論文内で用いる定理を紹介する。併せて直観主義論理のシーケント計算及び Kripke frame についての基礎知識も解説する。

第三章では、第四章の準備として第二章で扱った中間命題論理の論理記号を $S (\exists \rightarrow)$ に制限した部分体系である S 論理の定義と、普遍代数に関する基本的な結果、またその特別な場合として、 S 論理に対応する S 代数の定義と性質を整理する。 S 代数はハイティング代数の一般化であり、その性質の殆どはハイティング代数のそれを継承するが、 S 代数に関するまとまった文献は著者の見る限り既存のものに確認できないため、ここで証明を記載する。

第四章では本論文のテーマである保存性について議論する。まず、与えられた中間論理の公理化 $\mathbf{H} + \Gamma$ 及び $S \subseteq S'$ となる S と S' に対し、 $\mathbf{H} + \Gamma$ が S と S' 間で保存性を満たすことと同値な代数的条件を与える。この際用いたのは強完全性定理と、 S 代数 \mathbf{M} に定義される Jankov's characteristic formula $X(\mathbf{M})$ である。これは中間論理 $\mathbf{H} + X(\mathbf{M})$ における証明可能性を \mathbf{M} の埋め込み可能性という代数的条件に置き換える性質を持つ。Jankov は \mathbf{M} が有限 S 代数の場合に限って $X(\mathbf{M})$ を定義したが、強完全性定理を用いることで、 $X(\mathbf{M})$ と同等の構造を無限代数にも定めることができる。

さらに $S \cup \{\wedge\} \subseteq S'$ の場合に限り、その代数的条件が、特定の $S \cup \{\wedge\}$ 代数のクラス $\{C(\mathbf{M}) \mid \mathbf{M} \text{ は } \mathbf{H}_S + \Gamma \text{ 代数}\}$ に依存することを証明した。この際用いたのは Horn による与えられた S 代数 \mathbf{M} に対し、 \mathbf{M} を部分代数を持つ「最小」の $S \cup \{\wedge\}$ 代数 $C(\mathbf{M})$ を構成する方法である。Horn は 1960 年代、直観主義論理 \mathbf{H} が separable であることの別証明を与えた際、この方法を用いた。この条件の有用性は、 $C(\mathbf{M})$ の構成が非常に単純であり、特に \mathbf{M} が有限のとき、その構造を理解することが容易であることに由来する。

最後にこれら結果の応用として、保存性に関する Khomich の定理のうちいくつかについて別証明を与える。

第五章では、第四章の結果の応用の一つとして、Gabbay-de Jongh の論理の separable な公理化を与える。Gabbay-de Jongh の論理 \mathbf{D}_m ($m \geq 2$) は、有限 m 分木の Kripke frame 全体が特徴づける中間論理であり、数多くの有名な性質を持つ中間論理として考案され、多くの研究の対象とされてきた。 \mathbf{D}_m ($m \geq 2$) は公理化に \vee が必要であり、かつ有限代数のクラスで定義できない論理であるため、Khomich による既存の特徴づけが適用できず、このような論理に対する separability の証明は、我々が初めて与えるものである。この証明は具体的に有限 S 代数を 1 つ構成し、その Jankov's characteristic formula を公理として加えた中間論理が、Gabbay-de Jongh の論理の一つの公理化であること、またそれが separable であること、という二つの別個な命題によって構成される。また、これらを示すのに用いたと同様の手法により、Gabbay と de Jongh が最初に与えた公理化について、それ自体は separable な公理化でないことを、併せて証明する。

第六章では、Dummett の論理 \mathbf{LC} と同等な hypersequent calculus の体系として、Avron が与えた、保存性が成り立つ体系 \mathbf{GLC} 及び保存性が成り立たない体系 \mathbf{GLCW} を、我々の立場から代数的に考察する。hypersequent calculus は論理をより複雑な構造で扱うシステムの一つで、保存性に対しては、その複雑な構造ゆえに論理記号の関係する操作が最小限となり、結果として論理記号の役割を明確にする利点がある。まず、Avron が証明した \mathbf{GLCW} の論理記号を S に制限した部分体系 \mathbf{GLCW}_S の cut 除去定理について、「 $\wedge \notin S$ かつ $\vee \in S$ であるときに cut 除去が可能である」という Avron の主張が誤りであることを示し、反例を与える。

続いて、 \mathbf{GLCW} の $m \geq 2$ への一般化 $m\text{-GLCW}$ を定義し、これが \mathbf{GLCW} の性質を保っていることを示す。特に Ciabattoni と Ferrari による \mathbf{GLC} の一般化 $m\text{-GLC}$ と $m\text{-GLCW}$ の関係が元の \mathbf{GLC} と \mathbf{GLCW} の関係と一致している点及び、 $m\text{-GLCW}$ の保存性問題とそれに関連する cut 除去定理の可否が、 \mathbf{GLCW} のそれと一致することを証明する。

3 本研究の成果と今後の課題

本研究で得られた成果は、以下の形にまとめられる。

1. 与えられた S 論理式の集合 Γ と $S \subseteq S'$ となる S と S' に対し、 $\mathbf{H}_S + \Gamma$ と $\mathbf{H}_{S'} + \Gamma$ の間で保存性が成り立つか、という条件に対して、代数的な必要十分条件を与えた。さらに $S \cup \{\wedge\} \subseteq S'$ の場合に限り、その代数的条件を特定の代数のクラスに関する条件という形に簡略化した。

2. 1の結果の応用として, Gabbay-de Jonghの論理の separability を証明した.

3. 1で用いた手法の応用として, Avronの **GLCW**の部分体系について議論をより精緻化し, 一般化を与えた.

上記の結果2と3は, 1で与えた代数的条件の有用性を示すものとする.

今後の課題として, まず第四章で得た保存性の代数的特徴付けは, 拡張した言語 S' に $\{\wedge\}$ を持たない場合について, より扱いやすい形を議論する必要がある. 第五章では, Jankov's characteristic formula と第四章の結果を利用して separability を証明したが, この手法が応用できるような他の中間論理は現在見つかっていない. 先述の課題と関連し, より細かな特徴づけが得られれば, 応用できる対象も広がると思われる. 第六章では **GLC** と **GLCW** の差を代数的に考察したが, その際, 「Jankov's characteristic formula で見た場合に **GLC** と **GLCW** の中間の証明力を持つ論理」が得られる. これは既存の中間論理になんらかの形で対応するか, またこれと hypersequent calculus でよい性質をもつものが構成できるかなど, 考察の余地がある. さらに, テーマである中間論理の保存性と密接に関連している, それと同等な hypersequent calculus の cut 除去定理について, その代数的特徴づけがどのように得られるか, また本研究で得られた特徴づけとどう関連するかという課題がある.