剛性を持つ粒子のツイスター形式

平成29年4月

鈴木　隆史

目 次

第1章　序論

核子や中間子のような強い相互作用をする粒子は，ハドロンと呼ばれている．このようなハドロンの模型として南部・後藤の弦模型が，1970 年代初頭に提案された [1,2]．南部・後藤の弦模型を定める作用積分は，南部・後藤の作用積分と呼ばれ，弦が時空間上を運動するときに描かれる世界面の面積で与えられる．このとき，古典的な弦の運動は，この作用積分が最小となるように決まる．さて，南部・後藤の弦模型は現在でも様々な立場から考察されているが，ハドロンの模型としては不満足なものと考えられるようになった．その理由としては，時空の次元が 4 次元でなく 26 次元でないと矛盾が生じることやハドロンの模型が持つべき性質である漸近的自由性が導けないことなどが挙げられる．後者の問題を解決するために，1985 年に，Polyakov は，南部・後藤の弦模型を拡張した剛性を持つ弦模型 (rigid string) を提案した [3]．この拡張は，南部・後藤の作用積分に世界面の外曲率を付加することでなされる．このような剛性を持つ弦模型から実際に漸近的自由性が導かれることは，Olesen と Yang によって確かめられた [4]．(その後，剛性を持つ弦模型を拡張した世界面の捩率を取り入れた模型が提案された [5]．この模型もまた量子色力学の有効理論として研究されている [6].)

1986 年に，Pisarski は，剛性を持つ弦模型を簡略化した剛性を持つ粒子模型 (rigid particle) を提案した [7]．この簡略化は，物理的対象を，1 次元の空間的拡がりを持つ弦から空間的広がりのない点粒子に単純化することでなされるので，弦模型における世界面とその面積に相当するものは，粒子模型では，時空間上を運動する点粒子が描く世界線とその長さになる．したがって，剛性を持つ粒子模型を定める作用積分は，世界線の長さ (相対論的自由粒子の作用積分) に世界線の外曲率を付加したもので与えられる．実際に，世界線の外曲率を $K = K(l)$ とすると，剛性を持つ粒子の作用積分は次のようになる[1]:

$$\mathcal{S} := \int_{l_0}^{l_1} dl\,(-m - kK)\ . \tag{1.1}$$

[1]本論文では，$\hbar = c = 1$ の自然単位系を採用している．

ここで，l は点粒子が描く世界線の弧長パラメーター，m は質量パラメーター，k は無次元の実定数パラメーターである．また，Pisarski は，剛性を持つ粒子模型を提案すると同時に，この模型からも漸近的自由性が導かれることを示した．式 (1.1) で記述される粒子は，$m=0$ のとき剛性を持つ無質量粒子と呼ばれ，$m \neq 0$ のとき剛性を持つ有質量粒子と呼ばれる．剛性を持つ粒子模型が提案されてから現在まで，この模型は多様な観点から研究されてきた [8–24].

その中で，Plyushchay は，剛性を持つ粒子模型の古典力学と量子力学を考察した．量子化においては，運動量変数と内部座標を引数に持つ波動関数が導かれ，剛性を持つ粒子模型はスピンを持つ粒子を記述することが明らかにされた [8,9,11,12]. 特に，剛性を持つ無質量粒子のスピン (ヘリシティー) 量子数の値は整数値と半整数値の何れもが許され [12]，剛性を持つ有質量粒子のスピン量子数の値は整数値のみに限られることが示された [8,9]．しかしながら，Plyushchay が行った先行研究では，4 次元時空における場の関数とそれが満たす場の方程式が導かれておらず，それらの導出は考察すべき課題として残されている．また近年，Deriglazov と Nersessian によって剛性を持つ有質量粒子が再考察され，スピン量子数の値が 1/2 になる可能性が指摘された．このように，有質量粒子の場合には相反する 2 つの報告があるため，どちらが正しいのかを明確にする必要がある．

以上の事柄を背景として，本論文では見通しの良い議論を展開するために，式 (1.1) にある剛性を持つ粒子模型の作用積分をツイスター変数を用いて書き換え，剛性を持つ粒子のツイスター形式を構築する．また，この形式に基づいて剛性を持つ粒子模型の古典力学と量子力学を考察し，粒子のスピン量子数が取り得る値を求め，先行研究で求められた値と比較する．さらに，ツイスター理論の技法を適用することで，剛性を持つ粒子の波動関数 (ツイスター関数) のペンローズ変換として 4 次元時空におけるスピナー場を導出し，それが場の方程式を満たすことを確認する．加えて，剛性を持つ粒子模型の一種を変形することで，ローレンツ・ディラック方程式 (放射反作用を受ける荷電粒子の運動方程式) [25] を与える 2 種類のラグランジアンを構成する．

本論文の構成は次の通りである: 第 2 章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を議論するのに先立ち，4 次元時空上のスピンを持つ無質量粒子を記述するツイスター模型について考察する．この模型を定める作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分と呼ばれ，ツイスター変数とゲージ場を用いて与えられる．ここでは，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，それに基づく正準形式を構築し，その後，無質量粒子の正準量子化を実

行する．すると，スピナーの添字を持つ平面波解が得られ，同時にスピン量子数の値が整数値または半整数値に制限される．得られた平面波解と係数関数を用いることで，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場が求まる．また，係数関数に対して適切なフーリエ・ラプラス変換を行うことで，スピナー場をツイスター関数のペンローズ変換として表すことができる．

第3章では，白藤によって展開されたスピンを持たない無質量粒子のツイスター形式を導く方法に従って，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を構築し，その作用積分が第2章で議論されたゲージ化された白藤の作用積分に一致することを証明する．そのためにまず，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン $L_0(l) := -|k|K$ と等価な1次形式のラグランジアンを与える．その後，1次形式のラグランジアンから得られる拘束条件の解を2成分スピナーを用いて書き下す．この解を1次形式のラグランジアンに代入し，多少の式変形を行うと，時空座標とスピナー変数を用いて書かれた簡潔なラグランジアンが導かれる．さらに，このラグランジアンをツイスター変数を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンが導出される．このラグランジアンから定まる作用積分は，第2章で議論されたゲージ化された白藤の作用積分に一致する．こうして剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式が構築されたので，ツイスター変数で表現されたラグランジアンに基づく剛性を持つ無質量粒子の正準量子化を第2章と同様の手順で実行すると，次数 $-2k-2$ のツイスター関数が得られる．この関数は量子論における波動関数に相当するため，ツイスター関数に1価性を課すと，次数 $-2k-2$ は整数値に制限され，スピン量子数の値は整数値または半整数値に定まる．また，ツイスター関数のペンローズ変換を行うと，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場が求まる．

第4章では，第3章と同様の手順で剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を構築し，それを基に剛性を持つ有質量粒子の古典力学と量子力学を議論する．まず，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン $L_m(l) := -m - |k|K$ と等価な1次形式のラグランジアンを与え，これより得られる拘束条件の解を運動量スピナーを用いて書き下す．この解を1次形式のラグランジアンに代入すると，時空座標とスピナー変数を用いて書かれた剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが得られる．このとき，時空座標とスピナー変数から成るツイスター変数が2個定義されるので，得られたラグランジアンを2個のツイスター変数を用いて書き換えると，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが導出される．このように，有質量粒子の場合に2個のツイスター変数が必要になることは，従

来の関連する研究と整合している．こうして剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式が構築されたので，ツイスター変数で表現されたラグランジアンを基に正準形式を構成し，その後，剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を実行する．すると，2個のツイスター変数それぞれについて次数が同じであるツイスター関数が得られるので，これに1価性を課すと次数は整数値に制限される．同時に，パウリ・ルバンスキーのスピンベクターと粒子の質量の間に成り立つ関係式を量子力学的に考察することで，Plyushchayが導出した質量公式が導かれる．得られたツイスター関数のペンローズ変換を行うと，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすスピナー場が求まる．さらに，このスピナー場が持つ添字の個数と，粒子が持つスピンの大きさの量子数の間に成り立つ関係式を数学的に考察し，ツイスター関数が2個のツイスター変数それぞれについて同じ次数であることを用いると，粒子のスピン量子数が取り得る値は非負の整数値に制限されることがわかる．このことから，粒子のスピン量子数が半整数値になる可能性は否定され，Plyushchayの結論を支持する結果が得られる．

上述のように，PlyushchayはL_mをラグランジアンとして採用したが，外曲率の2乗を含む$\tilde{L}_m(l) := -m - |k|K^2$をラグランジアンとする模型も他の研究者により考察されている．第5章では，$\tilde{L}_m$を変形し，それに外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える2種類の相対論的なラグランジアンを構成する．これらのラグランジアンのうちの1つには世界線のパラメーターにあらわに依存する減衰項が含まれ，他の1つには世界線のパラメーターにあらわに依存しない，2つの力学変数から成る交差項が含まれている．実際に，それぞれのラグランジアンから，ソース項を持つローレンツ・ディラック方程式がオイラー・ラグランジュ方程式として導かれることを示す．

最後に第6章では，本論文で得られた結果をまとめ，今後の課題について述べる．

第2章　スピンを持つ無質量粒子の正準形式と量子化

本章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を議論するのに先立ち，4 次元時空上のスピンを持つ無質量粒子を記述するツイスター模型を考察する．この模型を定める作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分と呼ばれ，1 次元パラメーター空間上のツイスター変数とゲージ場を用いて与えられる．本研究では，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，その正準形式を展開する．その後，正準形式を基に無質量粒子の正準量子化を実行し，平面波解を求める．この平面波解と係数関数を用いて，正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を構成する．また，この波動関数は一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場であることを示す．係数関数のフーリエ・ラプラス変換を行うことで，このスピナー場をツイスター空間上の正則関数のペンローズ変換として表す．さらに，負振動数の場合に対しても同様の考察を行う．加えて，スピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数を与え，スピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示を求める．

2.1　導入

現在までに，スピンを持つ相対論的な無質量自由粒子を記述するための様々な古典的模型が与えられてきた．これらの模型は主に，可換な変数だけを用いて構成されるボソン的模型と，可換な変数および反可換な変数の両方を用いて構成される超対称的模型の 2 つに分類される．前者の例としては剛体模型 (rigid body model) [26–28]，相対論的な回転子模型 (relativistic rotator model) [29, 30]，バルト・ザンギ模型 [31–33]，剛性を持つ粒子模型 (point-particle model with rigidity) [11,12,14] などがある．一方，後者の例としては世界線上の超対称性を持つ回転粒子模型 (spinning particle model) [34–36]，超粒子模型 (superparticle model) [37–39] などがある．本章では，4 次元時空上のスピンを持つ無質量自由粒子を記述するボ

ソン的なツイスター模型を扱う．(ツイスター模型は超対称性を持つように拡張できるが，そのような拡張は本研究では議論されないことを述べておく．)

スピンを持つ無質量自由粒子を記述するボソン的なツイスター模型は，白藤によって最初に研究された [40]．白藤は，4 次元時空上の無質量系を記述するのに有効な枠組みであるツイスター理論 [41–44] を基に，スピンを持つ無質量自由粒子を記述するツイスター模型を与えた．この模型を定める作用積分は，白藤の作用積分と呼ばれ，ツイスター変数を用いて書かれた簡潔な形式で与えられる．さらに白藤は，この作用積分に基づくスピンを持つ無質量粒子の古典力学と量子力学を考察した．そこでは，ツイスター量子化 [41,42,45,46] が実行された．(文献 [40,47–51] では，超対称性を持つ白藤の作用積分に関する研究が行われ，無質量超粒子を記述するためにスーパーツイスター変数 [52] が用いられている．)

2010 年に，白藤の作用積分は，ツイスター変数に対する複素局所スケール変換のもとで不変になるように，ゲージ原理に従って修正された [53]．この修正は，世界線に沿ったパラメーター空間上のゲージ場を導入し，1 次元チャーン・サイモン項を白藤の作用積分に加えることで実現される．このような修正を施された白藤の作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分と呼ばれている．ゲージ化された白藤の作用積分は複素局所スケール変換のもとでの不変性を持つので，この作用積分はツイスター変数よりも射影ツイスターを用いて定義されるようになる．このことは，ツイスター理論において射影ツイスターがツイスター変数よりも本質的であることと両立している [42,43]．また，ゲージ化された白藤の作用積分には，その修正の結果，ヘリシティー条件を与える項が含まれている．したがって，ゲージ化された白藤の作用積分は，ヘリシティーが定まった無質量粒子を記述している．

ゲージ化された白藤の作用積分は，スピンを持つ無質量粒子を記述する簡潔な形式を与える．しかしながら，ツイスター変数を用いて書かれているため，時空座標との関係は明らかではない．このため，ゲージ化された白藤の作用積分に時空上のゲージ場との相互作用を取り入れることは簡単ではない．そこで本研究では，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，この作用積分に基づく正準形式と無質量粒子の正準量子化を考察する．

まず，実際に，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換える．次に，Dirac による拘束条件を持つ正準形式を展開する方法 [54–56] に従って，この作用積分に基づく正準形式を展開する．すると，この系には第一次拘束条件と第二次拘束条件が現れるので，これらを第一類拘束条件と第二類拘束条件に分類する．その際，第二類拘束条件に関しては，ディラック括弧を定義

し正準変数を減らすことで処理される．このように正準形式を展開した後，正準量子化は，正準変数を対応する演算子に置き換え，ディラック括弧から定まる交換関係を設定することで実行される．このとき，第一類拘束条件に関しては，量子化した後で物理的状態を定義する条件式として読み換えられる．この条件式を波動方程式として表すと連立微分方程式が得られるので，これを解くと平面波解が求まる．この平面波解に係数関数をかけて運動量変数に関して積分すると，正振動数の波動関数が得られる．この波動関数は，積分の収束性を考察することで，複素ミンコフスキー空間上の管状領域で明確に定義されることが証明される．また，波動関数は一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場であることが示される．このスピナー場は，係数関数のフーリエ・ラプラス変換を行うことで，ツイスター関数のペンローズ変換 [41–45] として表すことができる．また，負振動数の場合に対しても同様の考察を行う．さらに，スピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数を構成する．この関数は，アンフォールデッド方程式 (unfolded equation) [57, 58] と呼ばれる基礎方程式を満たすことが示される．また指数型母関数から，スピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示が求められ，この表示は共形反転変換された時空座標を用いて表されることがわかる．

本章は次のように構成されている: 第 2.2 節では，ゲージ化された白藤の作用積分について簡単に解説をし，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換える．第 2.3 節では，時空座標とスピナー変数を用いて書かれたゲージ化された白藤の作用積分に基づく正準形式を考察する．第 2.4 節では，前節で得られた正準形式を基に無質量粒子の正準量子化を実行し，平面波解を求める．第 2.5 節では，平面波解を用いて正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を構成し，それが一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場であることを示す．このスピナー場をツイスター関数のペンローズ変換として表す．また，負振動数の場合に対しても同様の考察を行う．第 2.6 節では，スピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数を与え，スピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示を求める．第 2.7 節は本章のまとめを行い，今後の課題を述べる．

2.2 ゲージ化された白藤の作用積分

この節では，ゲージ化された白藤の作用積分の簡単な解説を行い，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換える．

ツイスター変数 Z^A $(A=0,1,2,3)$ とそれと対になる双対ツイスター変数 $\bar{Z}_A$ を

$$Z^A := (\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha}) \ , \quad \bar{Z}_A := \left(\bar{\pi}_\alpha, \bar{\omega}^{\dot\alpha}\right) \quad (\alpha = 0,1; \dot\alpha = \dot{0}, \dot{1}) \tag{2.2.1}$$

と定義すると，ゲージ化された白藤の作用積分は次のように与えられる (文献 [53] 付録 B 参照):

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2}\lambda \left(\bar{Z}_A D Z^A - Z^A \bar{D} \bar{Z}_A \right) - 2ke \right] . \tag{2.2.2}$$

ここで，

$$D := \frac{d}{d\tau} - ie \tag{2.2.3}$$

を定義した．また，$Z^A = Z^A(\tau)$ と $\bar{Z}_A = \bar{Z}_A(\tau)$ は 1 次元パラメーター空間 $\mathcal{T} = \{\tau | \tau_0 \le \tau \le \tau_1\}$ 上の複素スカラー場，$\lambda = \lambda(\tau)$ は $\mathcal{T}$ 上の実スカラー場，$e = e(\tau)$ は $\mathcal{T}$ 上の実スカラー密度場である．式 (2.2.2) を e で変分すると，ツイスター変数を用いて書かれた粒子のヘリシティーを表す量 $\frac{1}{2}\bar{Z}_A Z^A$ が k に定まることがわかる．したがって，作用積分 (2.2.2) は 4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上を運動するヘリシティー k を持つ無質量自由粒子を記述している．このとき，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ である．いま，作用積分 S は，明らかに，パラメーター τ の付け替え

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau) \quad \left(\frac{d\tau'}{d\tau} > 0 \right) \tag{2.2.4}$$

のもとで不変である．さらに，作用積分 S は次の複素局所スケール変換のもとでも不変である:

$$Z^A \to Z'^A = v(t) Z^A \, , \tag{2.2.5a}$$

$$\bar{Z}_A \to \bar{Z}'_A = \bar{v}(t) \bar{Z}_A \, , \tag{2.2.5b}$$

$$\lambda \to \lambda' = |v(t)|^{-2} \lambda \, , \tag{2.2.5c}$$

$$e \to e' = e + \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} \, . \tag{2.2.5d}$$

ここで，$v = v(\tau)$ は複素ゲージ関数であり，実ゲージ関数 $\theta(\tau)$ は $\theta := \frac{1}{2} i \ln(\bar{v}/v)$ と与えられる．このとき，実場 e は U(1) ゲージ場の役割を果たしていて，D はそれに対応する共変微分になる．また，1 次元チャーン・サイモン項 $-2k\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau e$ のゲージ不

変性は，実ゲージ関数 $\theta(\tau)$ に境界条件 $\theta(\tau_0) = \theta(\tau_1)$ を課すことで保たれる．複素局所スケール変換 (2.2.5) のもとで作用積分 S が不変になることは，作用積分 S が実際にはツイスター変数 Z^A そのものよりも射影ツイスター $[Z^A] := \left\{ cZ^A \middle| c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$ によって定義されていることを意味している．したがって，作用積分 S は射影ツイスター $[Z^A]$ によって記述されることがわかる．この結果は，ツイスター理論においてツイスター変数そのものよりも射影ツイスターの方がより本質的であるという事実と整合している．射影ツイスター $[Z^A]$ はそれを $[Z^A]$ の集合の代表元とみなすことで Z^A と略記される．

いま，$\lambda > 0$ としてツイスター変数と双対ツイスター変数を Z^A と $\bar{Z}_A$ から

$$Z^A \to \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Z^A, \quad \bar{Z}_A \to \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \bar{Z}_A \tag{2.2.6}$$

にスケールを変更すると，作用積分 (2.2.2) は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2} \left(\bar{Z}_A D Z^A - Z^A \bar{D} \bar{Z}_A \right) - 2ke \right] \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2} \left(\bar{Z}_A \dot{Z}^A - Z^A \dot{\bar{Z}}_A \right) + e \left(\bar{Z}_A Z^A - 2k \right) \right] \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

と書ける．ここで，変数の上のドット記号は τ に関する微分を表している．式 (2.2.2) で $\lambda = 1$ とおくとその S は式 (2.2.7) になるので，作用積分 (2.2.7) は作用積分 (2.2.2) の特別な場合である．このようなゲージ固定をすると，作用積分 (2.2.2) が持っていた複素局所スケール不変性は壊れてしまうが，局所 U(1) ゲージ不変性とパラメーターの付け替えに対する不変性は壊れることなく保たれている．

ここで，作用積分 S に含まれている場 e に比例する項

$$e \left(\bar{Z}_A Z^A - 2k \right) \tag{2.2.8}$$

に着目する．このような項は，$k = 0$ としたときに白藤の作用積分に取り入れられることが Gumenchuk と Sorokin によってすでに言及されていた [47]．また，式 (2.2.8) と同型の項に関する考察が，無質量粒子の正準形式を基に Plyushchay によって行われ，無質量超粒子に対しても同様の考察が行われた [49]．ほかにも，超粒子模型を定める作用積分に (拡張された) ヘリシティー条件を取り入れるために，式 (2.2.8) と同型の項が Bandos，Lukierski，Sorokin によって導入された [50]．その結果，U(1) ゲージ不変性が生じることが文献 [50] で指摘されたが，e に対応する場はラグランジュ未定係数として扱われている．文献 [51] と文献 [57] では，高

階スピンを持つ無質量 (超) 粒子を記述する模型が与えられている．この模型にはヘリシティーを持つ (超) 粒子を記述するために式 (2.2.8) を一般化した項が取り入れられている．またこの模型の中では，e に対応する場は局所位相変換に対するU(1) ゲージ場の役割を果たしている．本研究では上述の議論と異なり，局所位相変換 (2.2.5a) と (2.2.5b) のもとで白藤の作用積分が不変になるように，ゲージ原理に従ってゲージ場 e と実場 λ が導入されている．これに伴って共変微分 D が定義され，自動的に白藤の作用積分に式 (2.2.8) が取り入れられている．ここで，作用積分 (2.2.7) が持つ局所 U(1) ゲージ不変性については，Bars と Picón によっても述べられていることを指摘しておく [59,60].

ツイスター理論 [41–43] で用いられる 2 成分スピナー ω^α は，2 成分スピナー $\pi_{\dot\alpha}$ を用いて，

$$\omega^\alpha = iz^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} \tag{2.2.9}$$

と与えられる．ここで，$z^{\alpha\dot\alpha}$ は複素ミンコフスキー空間 $\mathbb{C}\mathbf{M}$ 上の座標で，パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素スカラー場である．また，複素座標 $z^{\alpha\dot\alpha}$ は，エルミート行列 $\overline{x^{\beta\dot\alpha}} = x^{\alpha\dot\beta}$ と $\overline{y^{\beta\dot\alpha}} = y^{\alpha\dot\beta}$ を導入すると，$x^{\alpha\dot\alpha}$ と $y^{\alpha\dot\alpha}$ を用いて $z^{\alpha\dot\alpha} = x^{\alpha\dot\alpha} - iy^{\alpha\dot\alpha}$ と表すことができる．ここで，$x^{\alpha\dot\alpha}$ はミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上の時空座標にほかならない．時空座標 $x^{\alpha\dot\alpha}$ とスピナー変数 $\bar\pi_\alpha$, $\pi_{\dot\alpha}$, $\psi^\alpha := y^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}$, $\bar\psi^{\dot\alpha} := y^{\alpha\dot\alpha}\bar\pi_\alpha$ を用いて式 (2.2.7) を書き換えると，次の式が得られる:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L\,, \tag{2.2.10}$$

$$L := -\dot x^{\alpha\dot\alpha}\bar\pi_\alpha\pi_{\dot\alpha} - i\left(\psi^\alpha\dot{\bar\pi}_\alpha - \bar\psi^{\dot\alpha}\dot\pi_{\dot\alpha}\right) + e\left(\psi^\alpha\bar\pi_\alpha + \bar\psi^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} - 2k\right)\,. \tag{2.2.11}$$

この式を導く際に，全微分項は作用積分に影響を与えないことから，$\frac{i}{2}\frac{d}{d\tau}(\psi^\alpha\bar\pi_\alpha - \bar\psi^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha})$ を無視した．作用積分 (2.2.10) は時空座標とスピナー変数を用いて書かれたゲージ化された白藤の作用積分である．また，式 (2.2.9) は $\omega^\alpha = ix^{\alpha\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} + \psi^\alpha$ と表すこともできる．さて，時空座標 $x^{\alpha\dot\alpha}$ に共役な正準運動量は

$$P^{(x)}_{\alpha\dot\alpha} := \frac{\partial L}{\partial \dot x^{\alpha\dot\alpha}} = -\bar\pi_\alpha\pi_{\dot\alpha} \tag{2.2.12}$$

と求まるので，$\bar\pi_\alpha$ と $\pi_{\dot\alpha}$ はスピナー変数で表された運動量変数 (運動量スピナー) に相当することがわかる．運動量スピナー $\bar\pi_\alpha$ と $\pi_{\dot\alpha}$ はそれぞれ，$\bar\pi_\alpha\bar\pi^\alpha = \pi_{\dot\alpha}\pi^{\dot\alpha} = 0$ を満たしているので，$P^{(x)}_{\alpha\dot\alpha}P^{(x)\alpha\dot\alpha} = 0$ が導かれる．このことは，作用積分 (2.2.10) が無質量粒子を記述することを意味している．

2.3 正準形式

この節では，時空座標とスピナー変数を用いて書かれたゲージ化された白藤の作用積分に基づく正準形式を構成する．

ラグランジアン (2.2.11) における一般化座標は $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, e)$ であり，それに対応する一般化速度は $(\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \dot{\bar{\pi}}_\alpha, \dot{\pi}_{\dot{\alpha}}, \dot{\psi}^\alpha, \dot{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}}, \dot{e})$ である．このとき，ラグランジアン (2.2.11) から導かれる正準運動量は次式となる:

$$P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}} = -\bar{\pi}_\alpha \pi_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.1a}$$

$$P^{\alpha}_{(\bar{\pi})} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\pi}}_\alpha} = -i\psi^\alpha\,, \tag{2.3.1b}$$

$$P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}_{\dot{\alpha}}} = i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.1c}$$

$$P^{(\psi)}_{\alpha} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^\alpha} = 0\,, \tag{2.3.1d}$$

$$P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}}} = 0\,, \tag{2.3.1e}$$

$$P^{(e)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0\,. \tag{2.3.1f}$$

式 (2.3.1) と式 (2.2.11) を用いると，正準ハミルトニアン H_{C} は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{C}} :=& \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}} P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} + \dot{\bar{\pi}}_\alpha P^{\alpha}_{(\bar{\pi})} + \dot{\pi}_{\dot{\alpha}} P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} + \dot{\psi}^\alpha P^{(\psi)}_{\alpha} + \dot{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}} P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} + \dot{e} P^{(e)} - L \\ =& -e\left(\psi^\alpha \bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \pi_{\dot{\alpha}} - 2k\right)\,. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

いま，正準座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, e)$ とそれに共役な正準運動量 $(P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, P^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, P^{(\psi)}_{\alpha}, P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, P^{(e)})$ を用いて，ポアソン括弧を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \{A, B\} :=& \left(\frac{\partial A}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\frac{\partial B}{\partial P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}}\frac{\partial B}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{\pi}_\alpha}\frac{\partial B}{\partial P^{\alpha}_{(\bar{\pi})}} - \frac{\partial A}{\partial P^{\alpha}_{(\bar{\pi})}}\frac{\partial B}{\partial \bar{\pi}_\alpha}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial A}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}}\frac{\partial B}{\partial P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}}\frac{\partial B}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \psi^\alpha}\frac{\partial B}{\partial P^{(\psi)}_{\alpha}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\psi)}_{\alpha}}\frac{\partial B}{\partial \psi^\alpha}\right) \\ &+ \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial B}{\partial P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}}\frac{\partial B}{\partial \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial e}\frac{\partial B}{\partial P^{(e)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(e)}}\frac{\partial B}{\partial e}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

式 (2.3.3) から，正準座標と正準運動量の間のポアソン括弧は次のようになる:

$$\left\{x^{\alpha\dot{\alpha}}, P^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right\} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, \tag{2.3.4a}$$

$$\left\{\bar{\pi}_{\alpha}, P^{\beta}_{(\bar{\pi})}\right\} = \delta^{\beta}_{\alpha}\,, \tag{2.3.4b}$$

$$\left\{\pi_{\dot{\alpha}}, P^{\dot{\beta}}_{(\pi)}\right\} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.4c}$$

$$\left\{\psi^{\alpha}, P^{(\psi)}_{\beta}\right\} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{2.3.4d}$$

$$\left\{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\beta}}\right\} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, \tag{2.3.4e}$$

$$\left\{e, P^{(e)}\right\} = 1\,. \tag{2.3.4f}$$

正準座標と正準運動量の間のその他のポアソン括弧は 0 になる．

式 (2.3.4) から，第一次拘束条件は次のようになることがわかる:

$$\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} := P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} + \bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{2.3.5a}$$

$$\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} := P^{\alpha}_{(\bar{\pi})} + i\psi^{\alpha} \approx 0\,, \tag{2.3.5b}$$

$$\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} := P^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} - i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{2.3.5c}$$

$$\phi^{(\psi)}_{\alpha} := P^{(\psi)}_{\alpha} \approx 0\,, \tag{2.3.5d}$$

$$\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} := P^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{2.3.5e}$$

$$\phi^{(e)} := P^{(e)} \approx 0\,. \tag{2.3.5f}$$

ここで，$\approx$ は弱い等号を表している．これ以降，$\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \phi^{(\psi)}_{\alpha}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, \phi^{(e)}$ を一次の拘束量と呼ぶ．ここから Dirac による特異系の正準形式を展開する方法 [54–56] に従って，ラグランジアン (2.2.11) に基づく正準形式を展開していく．そのためにまず，式 (2.3.4a)–(2.3.4f) を用いて一次の拘束量の間のポアソン括弧を計算すると，次の式が得られる:

$$\left\{\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \phi^{\beta}_{(\bar{\pi})}\right\} = \delta^{\beta}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.6a}$$

$$\left\{\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \phi^{\dot{\beta}}_{(\pi)}\right\} = \bar{\pi}_{\alpha}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.6b}$$

$$\left\{\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \phi^{(\psi)}_{\beta}\right\} = i\delta^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{2.3.6c}$$

$$\left\{\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\beta}}\right\} = -i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,. \tag{2.3.6d}$$

一次の拘束量の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，一次の拘束量と正準ハミルトニアン (2.3.2) の間のポアソン括弧は次式となる:

$$\left\{\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \tag{2.3.7a}$$

$$\left\{\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, H_{\mathrm{C}}\right\} = e\psi^{\alpha}\,, \tag{2.3.7b}$$

$$\left\{\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = e\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.7c}$$

$$\left\{\phi^{(\psi)}_{\alpha}, H_{\mathrm{C}}\right\} = e\bar{\pi}_{\alpha}\,, \tag{2.3.7d}$$

$$\left\{\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, H_{\mathrm{C}}\right\} = e\pi_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.7e}$$

$$\left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k\,. \tag{2.3.7f}$$

いま，正準ハミルトニアン (2.3.2) と一次の拘束量から，全ハミルトニアンを

$$H_{\mathrm{T}} := H_{\mathrm{C}} + u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} + u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} + u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} + u^{\alpha}_{(\psi)}\phi^{(\psi)}_{\alpha} + u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} + u_{(e)}\phi^{(e)} \tag{2.3.8}$$

と定義する．ここで，$u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}, u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}, u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}, u^{\alpha}_{(\psi)}, u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}, u_{(e)}$ はそれぞれの拘束条件に対応するラグランジュ未定係数であり，一般にパラメーター τ に依存する．正準変数の関数 $\mathcal{F}$ に対する時間発展の方程式は，全ハミルトニアン (2.3.8) を用いて，

$$\dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}, H_{\mathrm{T}}\} \tag{2.3.9}$$

と与えられる．式 (2.3.9) とポアソン括弧の結果 (2.3.6) と (2.3.7) を用いると，一次の拘束量に対する時間発展は次のように求まる:

$$\dot{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = \left\{\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} + u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha}\,, \tag{2.3.10a}$$

$$\dot{\phi}^{\alpha}_{(\bar{\pi})} = \left\{\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx e\psi^{\alpha} - u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\pi_{\dot{\alpha}} + iu^{\alpha}_{(\psi)}\,, \tag{2.3.10b}$$

$$\dot{\phi}^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} = \left\{\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx e\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\bar{\pi}_{\alpha} - iu^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}\,, \tag{2.3.10c}$$

$$\dot{\phi}^{(\psi)}_{\alpha} = \left\{\phi^{(\psi)}_{\alpha}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx e\bar{\pi}_{\alpha} - iu^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\,, \tag{2.3.10d}$$

$$\dot{\phi}^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} = \left\{\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx e\pi_{\dot{\alpha}} + iu^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.10e}$$

$$\dot{\phi}^{(e)} = \left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k\,. \tag{2.3.10f}$$

さらに式 (2.3.10) は，一次の拘束量が時間発展で変化しないという要請 (整合性の

条件) から，次のように書かれる:

$$\dot{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} + u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha} \approx 0\,, \tag{2.3.11a}$$

$$\dot{\phi}^{\alpha}_{(\bar{\pi})} = e\psi^{\alpha} - u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\pi_{\dot{\alpha}} + iu^{\alpha}_{(\psi)} \approx 0\,, \tag{2.3.11b}$$

$$\dot{\phi}^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} = e\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} - u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}\bar{\pi}_{\alpha} - iu^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})} \approx 0\,, \tag{2.3.11c}$$

$$\dot{\phi}^{(\psi)}_{\alpha} = e\bar{\pi}_{\alpha} - iu^{(\bar{\pi})}_{\alpha} \approx 0\,, \tag{2.3.11d}$$

$$\dot{\phi}^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} = e\pi_{\dot{\alpha}} + iu^{(\pi)}_{\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{2.3.11e}$$

$$\dot{\phi}^{(e)} = \psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k \approx 0\,. \tag{2.3.11f}$$

式 (2.3.11) に対しては次の 2 つの場合が考えられる：(1) ラグランジュ未定係数 u を決める場合，(2) ラグランジュ未定係数 u を含まず新たな拘束条件を決める場合. 式 (2.3.11f) は (2) の場合になっていて，

$$\psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k = 0 \tag{2.3.12}$$

が成り立つことがわかる．式 (2.3.11d) と式 (2.3.11e) は (1) の場合になっていて，$u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}$ と $u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}$ は

$$u^{(\bar{\pi})}_{\alpha} = -ie\bar{\pi}_{\alpha}\,, \tag{2.3.13}$$

$$u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}} = ie\pi_{\dot{\alpha}} \tag{2.3.14}$$

と定まる．式 (2.3.11a) は，式 (2.3.13) と式 (2.3.14) を式 (2.3.11a) に代入すると，

$$\dot{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \approx 0 \tag{2.3.15}$$

となる．このことは，$\dot{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ が恒等的に 0 になり式 (2.3.11a) から新たな拘束条件が現れないことを意味している．ラグランジュ未定係数 $u^{\alpha}_{(\psi)}$ と $u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}$ はそれぞれ，式 (2.3.11b) と式 (2.3.11c) から，$u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}$ が正準変数の関数として決まることで，定まることになる．したがって，最後まで定まらないラグランジュ未定係数は $u^{\alpha\dot{\alpha}}_{(x)}$ と $u_{(e)}$ である．このことは，式 (2.3.11a) と式 (2.3.11f) が第一類拘束条件であることを示唆している.

式 (2.3.12) から，第二次拘束条件は

$$\chi^{(e)} := \psi^{\alpha}\bar{\pi}_{\alpha} + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k \approx 0 \tag{2.3.16}$$

と与えられる．これ以降，$\chi^{(e)}$ を二次の拘束量と呼ぶ．二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と一次の拘束量の間のポアソン括弧は，次のように得られる:

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{\beta}_{(\bar{\pi})}\right\} = \psi^{\beta}\,, \tag{2.3.17a}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{\dot{\beta}}_{(\pi)}\right\} = \bar{\psi}^{\dot{\beta}}\,, \tag{2.3.17b}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{(\psi)}_{\beta}\right\} = \bar{\pi}_{\beta}\,, \tag{2.3.17c}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\beta}}\right\} = \pi_{\dot{\beta}}\,. \tag{2.3.17d}$$

二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と一次の拘束量の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と正準ハミルトニアン (2.3.2) とのポアソン括弧は

$$\left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0 \tag{2.3.18}$$

となる．いま，$\chi^{(e)}$ の時間発展は，式 (2.3.9)，式 (2.3.17)，式 (2.3.18) を用いると，

$$\dot{\chi}^{(e)} = \left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}\psi^{\alpha} + u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + u^{\alpha}_{(\psi)}\bar{\pi}_{\alpha} + u^{\dot{\alpha}}_{(\bar{\psi})}\pi_{\dot{\alpha}} \tag{2.3.19}$$

と求まる．式 (2.3.19) から，式 (2.3.13)，式 (2.3.14)，式 (2.3.11b)，式 (2.3.11c) を用いて，ラグランジュ未定係数 $u^{(\bar{\pi})}_{\alpha}, u^{(\pi)}_{\dot{\alpha}}, u^{\alpha}_{(\psi)}, u^{\alpha}_{(\psi)}$ を消去すると，$\dot{\chi}^{(e)}$ は

$$\dot{\chi}^{(e)} \approx 0 \tag{2.3.20}$$

となる．この式は，$\dot{\chi}^{(e)}$ が恒等的に 0 となり式 (2.3.19) から新たな拘束条件が現れないことを意味している．以上のことから，ラグランジアン (2.2.11) から得られる拘束条件をすべて導くことができた．

すべての拘束量間のポアソン括弧を計算して，式 (2.3.6) と式 (2.3.17) が得られた．しかしながら，これらの結果を基に拘束条件を第一類拘束条件か第二類拘束条件かに分類することは難しい．そこで，拘束量間のポアソン括弧がより簡単になるように，次の一次結合を考える [61]:

$$\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} := \phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} - i\phi^{(\psi)}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}} + i\bar{\pi}_{\alpha}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.21a}$$

$$\tilde{\chi}^{(e)} := \chi^{(e)} - i\psi^{\alpha}\phi^{(\psi)}_{\alpha} + i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} + i\bar{\pi}_{\alpha}\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} - i\pi_{\dot{\alpha}}\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}\,. \tag{2.3.21b}$$

このとき，新しい拘束条件の全体 $\left(\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \phi^{(\psi)}_{\alpha}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}\phi^{(e)}, \tilde{\chi}^{(e)}\right) \approx 0$ は元の拘束条件の全体 $\left(\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \phi^{(\psi)}_{\alpha}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, \phi^{(e)}, \chi^{(e)}\right) \approx 0$ に等しいので，式 (2.3.21a)

と式 (2.3.21b) は，$\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \approx 0$ と $\chi^{(e)} \approx 0$ に代わる拘束条件として採用される．新しい拘束量の間のポアソン括弧は，

$$\left\{\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \phi^{(\psi)}_{\beta}\right\} = i\delta^{\alpha}_{\beta}\,, \quad \left\{\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\beta}}\right\} = -i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \tag{2.3.22}$$

を除いてすべて 0 になることを示すことができる．こうして，$\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\tilde{\chi}^{(e)}$ を用いて拘束量間のポアソン括弧を簡単にすることができたので，拘束量間のポアソン括弧を行列にまとめると次のようになる:

$$\begin{array}{c} \\ \tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \\ \phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} \\ \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} \\ \phi^{(\psi)}_{\alpha} \\ \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} \\ \phi^{(e)} \\ \tilde{\chi}^{(e)} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \tilde{\phi}^{(x)}_{\beta\dot{\beta}} & \phi^{\beta}_{(\bar{\pi})} & \phi^{\dot{\beta}}_{(\pi)} & \phi^{(\psi)}_{\beta} & \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\beta}} & \phi^{(e)} & \tilde{\chi}^{(e)} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i\delta^{\alpha}_{\beta} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} & 0 & 0 \\
0 & -i\delta^{\beta}_{\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \end{array} . \tag{2.3.23}$$

この行列から，$\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \approx 0$, $\phi^{(e)} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(e)} \approx 0$ は第一類拘束条件に分類され，一方，$\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} \approx 0$, $\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} \approx 0$, $\phi^{(\psi)}_{\alpha} \approx 0$, $\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} \approx 0$ は第二類拘束条件に分類される．

ここで，ディラックの方法に従って，第二類拘束条件を処理できるように，ディラック括弧を定義する．まず，第二類拘束条件からなる行列 C を行列 (2.3.23) の部分行列として次のように与える:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\delta^{\alpha}_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \\ -i\delta^{\beta}_{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.3.24}$$

この行列 C には逆行列 C^{-1} が存在して，C^{-1} は C に等しいことがわかる．このことより，正準変数の任意関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ に対するディラック括弧は次のように定義される:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\mathrm{D}} := &\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} - i\left\{\mathcal{F}, \phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}\right\}\left\{\phi^{(\psi)}_{\alpha}, \mathcal{G}\right\} + i\left\{\mathcal{F}, \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}\right\}\left\{\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{G}\right\} \\ &+ i\left\{\mathcal{F}, \phi^{(\psi)}_{\alpha}\right\}\left\{\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}, \mathcal{G}\right\} - i\left\{\mathcal{F}, \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}\right\}\left\{\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}, \mathcal{G}\right\} . \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

このとき，関数 $\mathcal{F}$ と第二類の拘束量 $\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})}$, $\phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)}$, $\phi^{(\psi)}_{\alpha}$, $\phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}}$ との間のディラック括弧は恒等的に 0 になるので，第二類拘束条件はすべて強い等号 (=) で 0 におくことができる．すなわち，ディラック括弧を用いる限り

$$\phi^{\alpha}_{(\bar{\pi})} = 0\,, \quad \phi^{\dot{\alpha}}_{(\pi)} = 0\,, \quad \phi^{(\psi)}_{\alpha} = 0\,, \quad \phi^{(\bar{\psi})}_{\dot{\alpha}} = 0 \tag{2.3.26}$$

が成り立つ．したがって，ψ^{α} と $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ はそれぞれ，(定数倍を除いて) $\bar{\pi}_{\alpha}$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ に共役な正準運動量になることがわかる．これ以降，ディラック括弧を用いる限り，正準座標は $\left(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}, e\right)$ になり，それに共役な正準運動量は $\left(P^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}, \psi^{\alpha}, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}, P^{(e)}\right)$ になる．このような正準変数間のディラック括弧は，式 (2.3.25) と式 (2.3.4) を用いると，次のよう求まる:

$$\left\{x^{\alpha\dot{\alpha}}, P^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right\}_{\mathrm{D}} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, \tag{2.3.27a}$$

$$\left\{\bar{\pi}_{\alpha}, \psi^{\beta}\right\}_{\mathrm{D}} = i\delta^{\beta}_{\alpha}\,, \tag{2.3.27b}$$

$$\left\{\pi_{\dot{\alpha}}, \bar{\psi}^{\dot{\beta}}\right\}_{\mathrm{D}} = -i\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.3.27c}$$

$$\left\{e, P^{(e)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\,. \tag{2.3.27d}$$

正準変数間のその他のディラック括弧は 0 となる．いま，第二類拘束条件はすべて強い等号 (=) で 0 になることから，式 (2.3.21a) と式 (2.3.21b) はそれぞれ $\tilde{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = \phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\tilde{\chi}^{(e)} = \chi^{(e)}$ に帰着する．したがって，第一類拘束条件は次のようになる:

$$\phi^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} \approx 0\,, \tag{2.3.28a}$$

$$\phi^{(a)} \approx 0\,, \tag{2.3.28b}$$

$$\chi^{(e)} \approx 0\,. \tag{2.3.28c}$$

2.4 正準量子化

この節では，第 2.3 節で構成された正準形式を基に無質量粒子の正準量子化を実行し，スピナー型の平面波解を求める．

量子力学に移行するために，関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ をそれぞれ対応する演算子 $\hat{\mathcal{F}}$ と $\hat{\mathcal{G}}$ に置き換えて正準交換関係

$$[\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}] = i\widehat{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}} \tag{2.4.1}$$

を設定する．ここで，$\widehat{\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}}$ はディラック括弧 $\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}_{\mathrm{D}}$ に対応する演算子を表している．式 (2.4.1) と式 (2.3.27) から，次の正準交換関係が定まる:

$$\left[\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{P}^{(x)}_{\beta\dot{\beta}}\right] = i\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}\,, \tag{2.4.2a}$$

$$\left[\hat{\bar{\pi}}_{\alpha}, \hat{\psi}^{\beta}\right] = -\delta^{\beta}_{\alpha}\,, \tag{2.4.2b}$$

$$\left[\hat{\pi}_{\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\psi}}^{\dot{\beta}}\right] = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,, \tag{2.4.2c}$$

$$\left[\hat{e}, \hat{P}^{(e)}\right] = i\,. \tag{2.4.2d}$$

正準変数間のその他の正準交換関係は 0 である．

量子化の手続きにおいて，第一類拘束条件 (2.3.28) は，第一類の拘束量を対応する演算子に置き換えた後，物理的状態 $|\varPhi\rangle$ を定義する条件式として読み替えることで処理される:

$$\hat{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}|\varPhi\rangle = \left(\hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} + \hat{\bar{\pi}}_{\alpha}\hat{\pi}_{\dot{\alpha}}\right)|\varPhi\rangle = 0\,, \tag{2.4.3a}$$

$$\hat{\phi}^{(e)}|\varPhi\rangle = \hat{P}^{(e)}|\varPhi\rangle = 0\,, \tag{2.4.3b}$$

$$\hat{\chi}^{(e)}|\varPhi\rangle = \left(\hat{\bar{\pi}}_{\alpha}\hat{\psi}^{\alpha} + \hat{\pi}_{\dot{\alpha}}\hat{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}} - 2k\right)|\varPhi\rangle = 0\,. \tag{2.4.3c}$$

ここで，$\hat{\phi}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\hat{\chi}^{(e)}$ に関してはワイル順序 (Weyl order) がとられていて，その後，交換関係 (2.4.2) を用いて簡潔な形に書き換えられている．

いま，ブラベクター $\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|$ を

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi| := \langle 0|\exp\left(ix^{\alpha\dot{\alpha}}\hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} + ie\hat{P}^{(e)} + \bar{\pi}_{\alpha}\hat{\psi}^{\alpha} - \pi_{\dot{\alpha}}\hat{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{2.4.4}$$

と定義する．ただし，$\langle 0|$ は

$$\langle 0|\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}} = \langle 0|\hat{e} = \langle 0|\hat{\bar{\pi}}_{\alpha} = \langle 0|\hat{\pi}_{\dot{\alpha}} = 0 \tag{2.4.5}$$

を満たすとする．さて，交換関係 (2.4.2) を用いると，次の式が求まる:

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}} = x^{\alpha\dot{\alpha}}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\,, \tag{2.4.6a}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\hat{e} = e\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\,, \tag{2.4.6b}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\hat{\bar{\pi}}_{\alpha} = \bar{\pi}_{\alpha}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\,, \tag{2.4.6c}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\hat{\pi}_{\dot{\alpha}} = \pi_{\dot{\alpha}}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|\,. \tag{2.4.6d}$$

また，次の式もすぐに求まる:

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \,, \tag{2.4.7a}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \hat{P}^{(e)} = -i\frac{\partial}{\partial e}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \,, \tag{2.4.7b}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \hat{\psi}^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_{\alpha}}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \,, \tag{2.4.7c}$$

$$\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \hat{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}}\langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \,. \tag{2.4.7d}$$

式 (2.4.3a)，式 (2.4.3b)，式 (2.4.3c) のそれぞれに左から $\langle x, e, \bar{\pi}, \pi|$ を乗じ，式 (2.4.6) と式 (2.4.7) を用いると，関数 $\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, e, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) := \langle x, e, \bar{\pi}, \pi | \varPhi\rangle$ に対する連立微分方程式が次のように得られる:

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\right)\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, e, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \,, \tag{2.4.8a}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial e}\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, e, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \,, \tag{2.4.8b}$$

$$\left(\bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_{\alpha}} - \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}} - 2k\right)\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, e, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \,. \tag{2.4.8c}$$

式 (2.4.8b) は関数 $\varPhi$ が e に依らないことを示しているので，関数 $\varPhi$ は

$$\varPhi = \varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) \tag{2.4.9}$$

と表せる．このことから，式 (2.4.8a) と式 (2.4.8c) は

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} + \bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\right)\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \,, \tag{2.4.10}$$

$$\left(\bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_{\alpha}} - \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}} - 2k\right)\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \tag{2.4.11}$$

となる．ここで，方程式 (2.4.10) を解くと平面波解が

$$\varPhi(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = \varLambda(\bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}})e^{-ix^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}} \tag{2.4.12}$$

と求まる．式 (2.4.12) を式 (2.4.11) に代入すると

$$\left(\bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{\pi}_{\alpha}} - \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial \pi_{\dot{\alpha}}} - 2k\right)\varLambda(\bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}) = 0 \tag{2.4.13}$$

が得られる．式 (2.4.13) の解は，k を適切に選ぶという条件のもとで $\varLambda$ が $\bar{\pi}_{\alpha}$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ の斉次式であるならば，一般にどのような関数でも成り立つ．しかしながら，$\varLambda$ が

$\bar{\pi}_\alpha$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ のみから構成され，かつローレンツ変換のもとで共変的であるという条件を課すと，(定数倍を除いて) $\varLambda$ は

$$\varLambda_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi}_\alpha,\pi_{\dot{\alpha}})=\bar{\pi}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}_{\alpha_p}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q} \tag{2.4.14}$$

に限られる．このことに応じて，k は

$$k=\frac{1}{2}(p-q)\,,\quad (p,q=0,1,2,\ldots) \tag{2.4.15}$$

と定まる．この結果はヘリシティー k が整数値または半整数値に量子化されることを意味している．式 (2.4.14) を式 (2.4.12) に代入することで，連立微分方程式 (2.4.8a)–(2.4.8c) の解は

$$\varPhi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x^{\alpha\dot{\alpha}},\bar{\pi}_\alpha,\pi_{\dot{\alpha}})=\bar{\pi}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}_{\alpha_p}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\exp\left(-ix^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\right) \tag{2.4.16}$$

と求まる．いま，時間座標 x^0 は $x^0=(x^{0\dot{0}}+x^{1\dot{1}})/\sqrt{2}$ と与えられるので，式 (2.4.16) は正振動数 $(|\pi_{\dot{0}}|^2+|\pi_{\dot{1}}|^2)/\sqrt{2}$ を持つ平面波解を記述していることがわかる．また，負振動数の平面波解は式 (2.4.16) の複素共役をとることで得られる．

2.5　スピナー形式で書かれた波動関数とペンローズ変換

この節では，平面波解 (2.4.16) を用いて，正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を構成し，この波動関数が明確に定義されるようにその正則化を考える．また，この波動関数は一般されたワイル方程式を満たすスピナー場であることを示す．さらに，適切なフーリエ・ラプラス変換を行うことで，このスピナー場をツイスター関数のペンローズ変換として表す．また，負振動数の場合にも同様の考察を行う．

2.5.1　正振動数の波動関数

いま，複素関数 $\tilde{F}^+(\bar{\pi},\pi)$ は，$|\pi_{\dot{0}}|\to\infty$ の極限で漸近的に $\tilde{F}^+_1(\bar{\pi}_1,\pi_{\dot{1}})(\bar{\pi}_0)^{k_0}(\pi_{\dot{0}})^{l_0}$ $(k_0,l_0\in\mathbb{Z})$ と振る舞い，$|\pi_{\dot{1}}|\to\infty$ の極限で漸近的に $\tilde{F}^+_0(\bar{\pi}_0,\pi_{\dot{0}})(\bar{\pi}_1)^{k_1}(\pi_{\dot{1}})^{l_1}$ $(k_1,l_1\in\mathbb{Z})$ と振る舞うものとする．ここで，$\tilde{F}^+_0$ と $\tilde{F}^+_1$ は，$\tilde{F}^+$ から定まる複素関数である．また，関数 $\tilde{F}^+$ には余分な定数スピナーも含められるとする．次の正振動数のスピ

ナー形式で書かれた波動関数を考える:

$$\begin{aligned}
&\Psi^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)\\
&:=\frac{(-1)^p}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\tilde{F}^{+}(\bar{\pi},\pi)\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\pi},\pi)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\\
&=\frac{(-1)^p}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\bar{\pi}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}_{\alpha_p}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\tilde{F}^{+}(\bar{\pi},\pi)\exp\Big(-ix^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\Big)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\,. \qquad (2.5.1)
\end{aligned}$$

ここで，積分測度 $d^2\bar{\pi}:=d\bar{\pi}_0\wedge d\bar{\pi}_1$ と $d^2\pi:=d\pi_{\dot{0}}\wedge d\pi_{\dot{1}}$ を定義した．式 (2.5.1) は平面波解 $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ と係数関数 $\tilde{F}^{+}$ との線形結合に相当している．また，式 (2.5.1) で与えられた積分が明確に定義されるためには，$|\pi_{\dot{0}}|^2+|\pi_{\dot{1}}|^2\to\infty$ の領域内で被積分関数の絶対値が十分に早く減少しなければならない．(ただし，被積分関数は $\mathbb{C}^2$ の原点で性質の良い関数であるとする．) そこで式 (2.5.1) の積分が明確に定義されるように，式 (2.5.1) において $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ を $z^{\alpha\dot{\alpha}}=x^{\alpha\dot{\alpha}}-iy^{\alpha\dot{\alpha}}$ に置き換え，指数型の因子 $\exp\big(-y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\big)$ が被積分関数に含まれるように書き換える．この因子の指数部分 $y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}$ は，実変数 y^μ $(\mu=0,1,2,3)$ とスピナー変数 $\varpi_{\dot{\alpha}}:=U_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}(y)\pi_{\dot{\beta}}$ を用いて

$$y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y^0+|\vec{y}|\right)|\varpi_{\dot{0}}|^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y^0-|\vec{y}|\right)|\varpi_{\dot{1}}|^2 \qquad (2.5.2)$$

と書き換えられる[1]．ここで，$|\vec{y}|$ は $|\vec{y}|:=\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2}$，行列 $U(y)$ は

$$U(y):=\frac{1}{\sqrt{2|\vec{y}|\big(y^3+|\vec{y}|\big)}}\begin{pmatrix} y^3+|\vec{y}| & y^1+iy^2\\ y^1-iy^2 & -y^3-|\vec{y}|\end{pmatrix} \qquad (2.5.3)$$

である．この行列はユニタリー行列であると同時にエルミート行列でもある．式 (2.5.2) から $y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}$ は，$y_\mu y^\mu\equiv(y^0)^2-|\vec{y}|^2>0$ かつ $y^0>0$ のときに限り，正の値になることがわかる．これら 2 つの y^μ に関する条件を組み合わせて領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ を

$$\mathbb{C}\mathbf{M}^+:=\Big\{(z^\mu)\in\mathbb{C}\mathbf{M}^\sharp\,\Big|\,z^\mu=x^\mu-iy^\mu,\,y_\mu y^\mu>0,\,y^0>0\Big\} \qquad (2.5.4)$$

---

[1] 2 階のスピナー $z^{\alpha\dot{\alpha}}$ と 4 元ベクター z^μ の間には次の関係式が成り立つ:

$$\begin{pmatrix} z^{0\dot{0}} & z^{0\dot{1}}\\ z^{1\dot{0}} & z^{1\dot{1}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z^0+z^3 & z^1+iz^2\\ z^1-iz^2 & z^0-z^3\end{pmatrix}$$

ここで，$z^{\alpha\dot{\alpha}}$ は，z^μ が実数のときに限り，エルミート性を満たすことに注意する．また，x^μ と y^μ は，$x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $y^{\alpha\dot{\alpha}}$ がそれぞれエルミート性を満たしているので，実数である．

と定義する．この領域は，前方管状領域 (forward tube または future tube) と呼ばれている [41–44]．ここで，$\mathbb{C}\mathbf{M}^\sharp$ は共形コンパクト化 (conformal compactification) された複素ミンコフスキー空間を表している．($\mathbb{C}\mathbf{M}$ の代わりに $\mathbb{C}\mathbf{M}^\sharp$ を採用することで，$(\pi_{\dot\alpha}) = 0$ を含むことができる.）領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ 内では $y^{\beta\dot\beta}\bar\pi_\beta\pi_{\dot\beta} > 0$ が成り立つので，

$$\begin{aligned}
&\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z)\\
&\quad= \frac{(-1)^p}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\bar\pi_{\alpha_1}\cdots\bar\pi_{\alpha_p}\pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\tilde F^+(\bar\pi,\pi)\exp\left(-iz^{\beta\dot\beta}\bar\pi_\beta\pi_{\dot\beta}\right)d^2\bar\pi\wedge d^2\pi \qquad (2.5.5)
\end{aligned}$$

の積分は，$(z^\mu)\in\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ である z^μ に対して明確に定義される．したがって，正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数 $\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z)$ は，領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ 内で明確に定義されることがわかる．式 (2.5.5) の中で，$\exp\left(-y^{\beta\dot\beta}\bar\pi_\beta\pi_{\dot\beta}\right)$ は減衰因子の役割を果たしている．いま，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上の波動関数に対応するスピナー形式で書かれた波動関数は

$$\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x) := \lim_{y^0\downarrow 0}\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z) \qquad (2.5.6)$$

と与えられる．

波動関数 $\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z)$ は，2 成分スピナーの性質 $\bar\pi_\beta\bar\pi^\beta = \pi_{\dot\beta}\pi^{\dot\beta} = 0$ を用いると，一般化されたワイル方程式

$$\frac{\partial}{\partial z_{\beta\dot\beta}}\mathit{\Psi}_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z) = 0\,, \qquad (2.5.7a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{\beta\dot\beta}}\mathit{\Psi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\beta\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_q}(z) = 0 \qquad (2.5.7b)$$

を満たしていることを簡単に示すことができる．このことは，$\mathit{\Psi}^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z)$ が一般化されたワイル方程式を満たす $p+q$ 階の無質量スピナー場であることを意味している．また，関数 $\mathit{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z,\bar\pi,\pi)$ は式 (2.5.7a) と式 (2.5.7b) の特殊解である．

ここから，係数関数 $\tilde F^+(\bar\pi,\pi)$ の $\bar\pi_\alpha$ についてのフーリエ・ラプラス変換

$$F^+(\omega,\pi) := \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\mathit{\Pi}^+}\tilde F^+(\bar\pi,\pi)\exp\left(-\bar\pi_\alpha\omega^\alpha\right)d^2\bar\pi \qquad (2.5.8)$$

を考える．ここで，ω^α は式 (2.2.9) によって与えられている 2 成分スピナーである．式 (2.5.8) は，適切な積分路 $\mathit{\Pi}^+$ に沿って周回積分を実行することで，ω^α と $\pi_{\dot\alpha}$ の正則関数 $F^+(\omega,\pi)$ が得られることを表している．また，その積分は $\bar\pi_0$ と $\bar\pi_1$ に関す

る 2 重の周回積分となる．(フーリエ・ラプラス変換 (2.5.8) は演算子 $\hat{\bar{\pi}}_\alpha = -\partial/\partial\omega^\alpha$ によって定まる表示と整合的である.) さて，スピナー変数 ω^α と $\pi_{\dot\alpha}$ を組み合わせたものは，ツイスター変数 $Z^A = (\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha})$ にほかならない．したがって，関数 F^+ は，$(\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha})$ という座標が張る 4 次元複素空間，すなわち (非射影的) ツイスター空間 $\mathbf{T}$ 上の正則関数とみなせ，$F^+(Z)$ と表すことができる．このような Z^A の正則関数はツイスター関数と呼ばれている．この F^+ が条件 $y^{\beta\dot\beta}\bar\pi_\beta\pi_{\dot\beta} > 0$ のもとで明確に定義されることは，等式

$$y^{\beta\dot\beta}\bar\pi_\beta\pi_{\dot\beta} = \Re(\bar\pi_\alpha\omega^\alpha) = \frac{1}{2}\left(\bar\pi_\alpha\omega^\alpha + \bar\omega^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\right) \tag{2.5.9}$$

から明らかである．つまり，F^+ はツイスター空間の上半分

$$\mathbf{T}^+ := \left\{(\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha}) \in \mathbf{T} \,\middle|\, \bar\pi_\alpha\omega^\alpha + \bar\omega^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} > 0\right\} \tag{2.5.10}$$

で明確に定義される．このことは，領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ に対応する $\mathbf{T}$ の領域が $\mathbf{T}^+$ であることを示している．より正確には，$\mathbf{T}^+$ 上の任意の点は，$\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ 上に全体として存在する α-平面と呼ばれる複素ナル平面 (complex null plane) に対応している．反対に，$\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ 上の任意の点は，$\mathbf{T}^+$ 上に全体として存在する $\mathbf{T}$ の 2 次元の部分空間に対応している．

式 (2.5.5) は，$\frac{\partial}{\partial\omega^\alpha}e^{-\bar\pi_\beta\omega^\beta} = -\bar\pi_\alpha e^{-\bar\pi_\beta\omega^\beta}$ が成り立つことから，ツイスター関数 $F^+(\omega, \pi)$ を用いて次のように書ける:

$$\Psi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\Sigma^+}\pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^+(\omega,\pi)d^2\pi\,. \tag{2.5.11}$$

ここで，$(z^\mu) \in \mathbb{C}\mathbf{M}^+$，$(\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha}) \in \mathbf{T}^+$ である．また，Σ^+ は Π^+ と異なる積分路である．式 (2.5.11) は，点付きのスピナー添字と点なしのスピナー添字の両方を持つペンローズ変換の非射影形式として知られているものである [42]．いま，z^μ を一定に保って，$d^2\pi$ を含む式 (2.5.11) の被積分関数に，$\pi_{\dot\alpha}$ についての外微分を作用させると，

$$d\left(\pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^+(\omega,\pi)d^2\pi\right) = 0 \tag{2.5.12}$$

が求まる．式 (2.5.11) の積分は，この結果に従ってポアンカレの補題とストークスの定理を用いると，積分領域内における積分路 Σ^+ の連続的変形に対して不変であることを証明できる．さて，F^+ は次数 r の斉次関数であると仮定すると，

$$F^+(c\omega, c\pi) = c^rF^+(\omega,\pi) \quad (c \in \mathbb{C}) \tag{2.5.13}$$

が成り立つ．このとき，式 (2.5.11) の積分において積分変数を $\pi_{\dot{\alpha}}$ から $c\pi_{\dot{\alpha}}$ へ置き換え，その積分が積分路の連続的変形のもとで不変であることを用いると，式 (2.5.11) の積分は，$c^{q-p+r+2}$ を乗じたものに変化する．しかしながら，式 (2.5.11) の積分は，$\pi_{\dot{\alpha}}$ が積分変数であることから，積分変数の置き換えに対して不変であることが言える．これらのことより，次の式が得られる:

$$\left(c^{q-p+r+2}-1\right)\oint_{\Sigma^+}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^+(\omega,\pi)d^2\pi=0\,. \tag{2.5.14}$$

この式の積分は，c が任意であることから，$r\neq p-q-2$ のとき 0 になり，$r=p-q-2$ のときだけ 0 にならないことがわかる．そこで，$r=p-q-2$ のときを採用すると，$d^2\pi$ を含む被積分関数は，$d\pi_{\dot{0}}/\pi_{\dot{0}}$ と $\zeta:=\pi_{\dot{1}}/\pi_{\dot{0}}$ に関する 1-形式の外積として表せる (このとき，$\pi_{\dot{0}}$ と ζ は互いに独立な変数である)．その後，$\pi_{\dot{0}}=0$ のまわりの閉曲線に沿って $\pi_{\dot{0}}$ の周回積分を実行すると，式 (2.5.11) は

$$\varPsi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\varGamma^+}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^+(\omega,\pi)\pi_{\dot{\beta}}d\pi^{\dot{\beta}} \tag{2.5.15}$$

に帰着する．ここで，積分路 $\varGamma^+$ は座標 ζ もしくは ζ^{-1} が張る複素射影直線 $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 上の閉曲線である．式 (2.5.15) はペンローズ変換の射影形式として知られている [41–45]．いま，関数 F^+ は，ヘリシティーを決める固有値方程式に相当する

$$\left(-\omega^\alpha\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}-\pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}-2+2k\right)F^+(\omega,\pi)=0 \tag{2.5.16}$$

を満たしていることを示すことができる．この式は，ツイスター理論におけるヘリシティーを決める固有値方程式と k につく符号だけ異なっている[2]．したがって，$\varPsi^+_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n}$ は負のヘリシティーを持つスピナー場を表し，一方，$\varPsi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ は正のヘリシティーを持つスピナー場を表していることがわかる．このことは，式 (2.4.15) からも確認される．

2.5.2 負振動数の波動関数

明確に定義された負振動数のスピナー形式で書かれた波動関数は，$\varPsi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_m\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n}(z)$ の複素共役をとることですぐに得られる．しかしながら，この方法で得られる負

[2]ツイスター理論におけるヘリシティーを決める固有値方程式は，次の式によって与えられる [41, 42]:

$$\left(-\omega^\alpha\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}-\pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}-2-2k\right)F(\omega,\pi)=0\,.$$

この式は作用積分 (2.2.7) に基づくツイスター量子化を行うことで得られる．また，この式は式 (2.4.11) と等価であることが証明できる．

振動数の波動関数は，$\overline{z^\mu}$ の関数になるので，反正則関数になる．以下では，負振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を正則関数として構成する．

はじめに，複素関数 $\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)$ は $\tilde{F}^+(\bar{\pi},\pi)$ と同様なものとする．次に，式 (2.5.1) の $\Psi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ に対応する負振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
&\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)\\
&:=\frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)\bar{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\pi},\pi)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\\
&=\frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\bar{\pi}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}_{\alpha_p}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)\exp\Big(ix^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\Big)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\,. \qquad (2.5.17)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\bar{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\pi},\pi):=\overline{\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_q\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_p}(x,\bar{\pi},\pi)} \qquad (2.5.18)
$$

である．関数 $\bar{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ は式 (2.4.8a)–(2.4.8c) の複素共役を満たし，それに対応する k の値は

$$
k=-\frac{1}{2}(p-q)\,,\qquad (p,q=0,1,2,\ldots) \qquad (2.5.19)
$$

によって決まる．この式は式 (2.4.15) と符号だけ異なっている．一般に，式 (2.5.17) の積分は，明確に定義されない．そこで，正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数を構成したのと同様に，$x^{\alpha\dot{\alpha}}$ を $z^{\alpha\dot{\alpha}}=x^{\alpha\dot{\alpha}}-iy^{\alpha\dot{\alpha}}$ に置き換える．すると，式 (2.5.17) の被積分関数には因子 $\exp\big(y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\big)$ が含まれるようになる．この因子は，条件式 $y_\mu y^\mu>0$ と $y^0<0$ を同時に満たす領域内で減衰因子としての役割を果たす (式 (2.5.2) 参照)．これら 2 つの y^μ に関する条件を組み合わせて領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ を

$$
\mathbb{C}\mathbf{M}^-:=\Big\{(z^\mu)\in\mathbb{C}\mathbf{M}^\sharp\,\Big|\,z^\mu=x^\mu-iy^\mu,\,y_\mu y^\mu>0,\,y^0<0\Big\} \qquad (2.5.20)
$$

と定義する．この領域は，後方管状領域 (backward tube または past tube) と呼ばれている [41–44]．領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ 内では $y^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}<0$ が成り立つので,

$$
\begin{aligned}
&\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)\\
&=\frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\bar{\pi}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}_{\alpha_p}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)\exp\Big(iz^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_\beta\pi_{\dot{\beta}}\Big)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi \qquad (2.5.21)
\end{aligned}
$$

の積分は，$(z^\mu)\in\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ である z^μ に対して明確に定義される．したがって，正則関数として与えられているときの負振動数の波動関数は，$\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ 内で明確に定義さ

れることがわかる．ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上の波動関数に対応するスピナー形式で書かれた波動関数は

$$\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) := \lim_{y^0\uparrow 0}\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z) \tag{2.5.22}$$

によって与えられる．また，$\Psi^+_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)$ のときと同様に，$\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)$ は一般化されたワイル方程式 (2.5.7a) と (2.5.7b) を満たす $p+q$ 階の無質量スピナー場であることを簡単に示すことができる．

ここから，係数関数 $\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)$ の $\bar{\pi}_\alpha$ についてのフーリエ・ラプラス変換

$$F^-(\omega,\pi) := \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\Pi^-}\tilde{F}^-(\bar{\pi},\pi)\exp\left(\bar{\pi}_\alpha\omega^\alpha\right)d^2\bar{\pi} \tag{2.5.23}$$

を考える．式 (2.5.23) は，適切な積分路 Π^- に沿って周回積分を実行することで，ω^α と $\pi_{\dot{\alpha}}$ のツイスター関数 $F^-(\omega,\pi)$ が得られることを表している．また，その積分は $\bar{\pi}_0$ と $\bar{\pi}_1$ に関する 2 重の周回積分となる．(フーリエ・ラプラス変換 (2.5.23) は演算子 $\hat{\bar{\pi}}_\alpha = \partial/\partial\omega^\alpha$ によって定まる共役な表示と整合的である．）ツイスター関数 F^- は，式 (2.5.9) から，ツイスター空間の下半分

$$\mathbf{T}^- := \left\{(\omega^\alpha,\pi_{\dot{\alpha}})\in\mathbf{T}\,\middle|\,\bar{\pi}_\alpha\omega^\alpha+\bar{\omega}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}<0\right\} \tag{2.5.24}$$

で明確に定義されることがわかる．このことは，領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ に対応する $\mathbf{T}$ の領域が $\mathbf{T}^-$ であることを示している．すなわち，$\mathbf{T}^+$ と $\mathbb{C}\mathbf{M}^+$ との間に存在する対応関係と同様な対応関係が $\mathbf{T}^-$ と $\mathbb{C}\mathbf{M}^-$ との間にも存在している．

式 (2.5.21) は，ツイスター関数 $F^-(\omega,\pi)$ を用いて次のように書ける:

$$\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\Sigma^-}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^-(\omega,\pi)d^2\pi\,. \tag{2.5.25}$$

ここで，$(z^\mu)\in\mathbb{C}\mathbf{M}^-$, $(\omega^\alpha,\pi_{\dot{\alpha}})\in\mathbf{T}^-$ である．また，Σ^- は Π^- と異なる積分路である．さて，F^- は次数 r' の斉次関数であると仮定する．すると，(2.5.25) の積分は，$r'\neq p-q-2$ のとき 0 になり，$r'=p-q-2$ のときだけ 0 にならないことがわかる．そこで，$r'=p-q-2$ のときを採用すると，式 (2.5.25) は

$$\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^-}\pi_{\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F^-(\omega,\pi)\pi_{\dot{\beta}}d\pi^{\dot{\beta}} \tag{2.5.26}$$

に帰着する．ここで，積分路 Γ^- は $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ 上の閉曲線である．式 (2.5.26) は，ペンローズ変換として表された負振動数のスピナー場 $\Psi^-_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)$ である．いま，関数 F^- は，共役な表示におけるヘリシティーを決める固有値方程式に相当する

$$\left(\omega^\alpha\frac{\partial}{\partial\omega_\alpha}+\pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}+2+2k\right)F^-(\omega,\pi)=0 \tag{2.5.27}$$

を満たしていることを示すことができる[3]．ここで，k は式 (2.5.19) で与えられる．式 (2.5.27) から，$\Psi^{-}_{\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n}$ は正のヘリシティーを持つスピナー場を表し，一方，$\Psi^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ は負のヘリシティーを持つスピナー場を表していることがわかる．

2.6 スピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数

この節では，第 2.5 節で与えられたスピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数を考える．また，この母関数からスピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示を求める．

式 (2.5.5) と式 (2.5.21) から，

$$-i\frac{\partial}{\partial z^{\beta\dot{\beta}}}\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z) = \Psi^{\pm}_{\beta\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\beta}\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z) \tag{2.6.1}$$

が成り立つことがわかる．いま，スピナー形式で書かれた波動関数 $\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)$ を生成する指数型母関数 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ を

$$\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa) := \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{p!q!}\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)\iota^{\alpha_1}\cdots\iota^{\alpha_p}\kappa^{\dot{\alpha}_1}\cdots\kappa^{\dot{\alpha}_q} \tag{2.6.2}$$

と定義する．ここで，ι^{α} と $\kappa^{\dot{\alpha}}$ はそれぞれ，任意の点なしスピナーと点付きスピナーである．また，関数 $\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)$ は，指数型母関数 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ の ι^{α} と $\kappa^{\dot{\alpha}}$ についてのマクローリン展開の展開係数である．指数型母関数 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ は，式 (2.6.1) を用いると，基礎方程式

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial z^{\alpha\dot{\alpha}}} - \frac{\partial^2}{\partial\iota^{\alpha}\partial\kappa^{\dot{\alpha}}}\right)\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa) = 0 \tag{2.6.3}$$

---

[3] 共役な表示におけるヘリシティーを決める固有値方程式は

$$\left(\omega^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\omega_{\alpha}} + \pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}} + 2 - 2k\right)G(\omega,\pi) = 0$$

と与えられて，この式は式 (2.5.27) と k につく符号だけ異なっている．この式は作用積分 (2.2.7) に基づくツイスター量子化を行うことで得られる．また，この式は式 (2.4.11) の複素共役，すなわち

$$\left(\pi_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}} - \bar{\pi}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}_{\alpha}} - 2k\right)\bar{\Phi}(\bar{\pi},\pi) = 0$$

に等価であることを証明できる．

を満たしていることを示すことができる．式 (2.6.3) は，いわゆるアンフォールデッド方程式 (unfolded equation) [57, 58]

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}}-\frac{\partial^2}{\partial\psi^{\alpha}\partial\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}\right)\tilde{\Phi}\big(x,\psi,\bar{\psi}\big)=0 \tag{2.6.4}$$

を複素化したものにほかならない．式 (2.6.4) は，本研究における定式化では，式 (2.4.3a) の左からブラベクター

$$\langle x,e,\psi,\bar{\psi}|:=\langle\tilde{0}|\exp\left(ix^{\alpha\dot{\alpha}}\hat{P}^{(x)}_{\alpha\dot{\alpha}}+ie\hat{P}^{(e)}-\psi^{\alpha}\hat{\bar{\pi}}_{\alpha}+\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\hat{\pi}_{\dot{\alpha}}\right) \tag{2.6.5}$$

を乗じることで得られる．ただし，$\langle\tilde{0}|$ は

$$\langle\tilde{0}|\hat{x}^{\alpha\dot{\alpha}}=\langle\tilde{0}|\hat{e}=\langle\tilde{0}|\hat{\psi}^{\alpha}=\langle\tilde{0}|\hat{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}}=0 \tag{2.6.6}$$

を満たすとする．また，関数 $\tilde{\Phi}$ は $\tilde{\Phi}(x,e,\psi,\bar{\psi}):=\langle x,e,\psi,\bar{\psi}|\Phi\rangle$ と定義され，式 (2.4.3b) を考慮することで $\tilde{\Phi}(x,\psi,\bar{\psi})$ と表される．

式 (2.6.2) に式 (2.5.5) と式 (2.5.21) を代入すると，式 (2.6.2) は

$$\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa)=\frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{\mathbb{C}^2}\tilde{F}^{\pm}(\bar{\pi},\pi)\exp\big(\mp iz^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\mp\bar{\pi}_{\alpha}\iota^{\alpha}+\pi_{\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}}\big)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi \tag{2.6.7}$$

となる．式 (2.6.7) における $\boldsymbol{\Psi}^{+}$ と $\boldsymbol{\Psi}^{-}$ はそれぞれ，積分 (2.5.5) と積分 (2.5.21) がそれぞれ前方管状領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^{+}$ と後方管状領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^{-}$ 内で収束することより，明らかに $\mathbb{C}\mathbf{M}^{+}$ と $\mathbb{C}\mathbf{M}^{-}$ 内で明確に定義される．また，式 (2.6.2) に式 (2.5.15) と式 (2.5.26) を代入すると，式 (2.6.2) は

$$\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma^{\pm}}\exp\left(\pi_{\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}}+\iota^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha}}\right)F^{\pm}(\omega,\pi)\pi_{\dot{\beta}}d\pi^{\dot{\beta}} \tag{2.6.8}$$

となる．この式は，第 2.5 節で求めたペンローズ変換の全体を 1 つにまとめた形式になっている．

いま，等式

$$\tilde{F}^{\pm}(\bar{\pi},\pi)\exp\big(\mp\bar{\pi}_{\alpha}\iota^{\alpha}+\pi_{\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}}\big)=\tilde{F}^{\pm}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\iota},\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\exp\big(\mp\bar{\pi}_{\alpha}\iota^{\alpha}+\pi_{\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}}\big) \tag{2.6.9}$$

が成り立つことがわかる．ただし，$\tilde{F}^{\pm}\big(\partial/\partial\iota,\partial/\partial\kappa\big)$ には積分演算子 $(\partial/\partial\iota^{\alpha})^{-1}:=\int d\iota^{\alpha}$ と $(\partial/\partial\kappa^{\dot{\alpha}})^{-1}:=\int d\kappa^{\dot{\alpha}}$ が含まれていて，それらの高次の項も含まれている

とする．式 (2.6.9) を式 (2.6.7) に用いると，式の式が求まる:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa)\\
&\quad=\frac{1}{(2\pi i)^4}\tilde{F}^{\pm}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\iota},\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\int_{\mathbb{C}^2}\exp\left(\mp i z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_{\alpha}\pi_{\dot{\alpha}}\mp\bar{\pi}_{\alpha}\iota^{\alpha}+\pi_{\dot{\alpha}}\kappa^{\dot{\alpha}}\right)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\\
&\quad=\frac{1}{(2\pi i)^4}\tilde{F}^{\pm}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\iota},\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\exp\left(i z^{-1}_{\dot{\alpha}\alpha}\kappa^{\dot{\alpha}}\iota^{\alpha}\right)\int_{\mathbb{C}^2}\exp\left(\mp i z^{\beta\dot{\beta}}\bar{\pi}_{\beta}\pi_{\dot{\beta}}\right)d^2\bar{\pi}\wedge d^2\pi\,.
\end{aligned}
\tag{2.6.10}
$$

ここで，$z^{-1}_{\dot{\alpha}\alpha}$ は $z^{\alpha\dot{\gamma}}z^{-1}_{\dot{\gamma}\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}$ と $z^{-1}_{\dot{\alpha}\gamma}z^{\gamma\dot{\beta}}=\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}$ を満たす行列要素である．式 (2.6.10) の積分を実行すると，

$$
\boldsymbol{\Psi}^{\pm}(z,\iota,\kappa)=\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{det}\left(z^{-1}_{\dot{\beta}\beta}\right)\tilde{F}^{\pm}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\iota},\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\exp\left(i z^{-1}_{\dot{\alpha}\alpha}\kappa^{\dot{\alpha}}\iota^{\alpha}\right)
\tag{2.6.11}
$$

が導かれる．式 (2.6.11) の $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ が式 (2.6.3) を満たしていることは，直接計算して確かめることができる．式 (2.6.11) から，スピナー形式で書かれた波動関数は，$\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ の ι^{α} と $\kappa^{\dot{\alpha}}$ についてのマクローリン展開の展開係数として，次のように得られる:

$$
\begin{aligned}
\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{det}\left(z^{-1}_{\dot{\beta}\beta}\right)&\frac{\partial^{p+q}}{\partial\iota^{\alpha_1}\cdots\partial\iota^{\alpha_p}\partial\kappa^{\dot{\alpha}_1}\cdots\partial\kappa^{\dot{\alpha}_q}}\\
&\times\tilde{F}^{\pm}\left(\mp\frac{\partial}{\partial\iota},\frac{\partial}{\partial\kappa}\right)\exp\left(i z^{-1}_{\dot{\alpha}\alpha}\kappa^{\dot{\alpha}}\iota^{\alpha}\right)\Big|_{\iota^{\alpha}=\kappa^{\dot{\alpha}}=0}\,.
\end{aligned}
\tag{2.6.12}
$$

このようにして，スピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示が得られた．さて，$z^{-1}_{\dot{\alpha}\alpha}$ に対応する反変ベクターを $(z^{-1})^{\mu}$ と書く[4]．すると，$(z^{-1})^{\mu}$ は，$(z^{-1})^{\mu}=2z^{\mu}/(z_{\nu}z^{\nu})$ と表すことができる．また，離散変換 $z^{\mu}\to\frac{1}{2}(z^{-1})^{\mu}$ は共形反転変換として知られている [62]．したがって，式 (2.6.12) の $\Psi^{\pm}_{\alpha_1\cdots\alpha_p\dot{\alpha}_1\cdots\dot{\alpha}_q}$ は共形反転変換された時空座標 $\frac{1}{2}(z^{-1})^{\mu}$ の関数であることがわかる．

2.7 まとめと今後の課題

本章では，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，それに基づく正準形式を展開した．その後，無質量粒子の正準量子化を考察した．

[4] 2 階のスピナー $z_{\dot{\alpha}\beta}(:=z_{\beta\dot{\alpha}})$ は反変ベクター z^{μ} との間に次の関係式が成り立つ:

$$
\begin{pmatrix} z_{\dot{0}0} & z_{\dot{0}1}\\ z_{\dot{1}0} & z_{\dot{1}1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_{0\dot{0}} & z_{1\dot{0}}\\ z_{0\dot{1}} & z_{1\dot{1}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} z^0-z^3 & -z^1-iz^2\\ -z^1+iz^2 & z^0+z^3\end{pmatrix}.
$$

まず，ゲージ化された白藤の作用積分の簡単な解説がされ，ゲージ化された白藤の作用積分は時空座標とスピナー変数を用いて書き換えられた．次に，その作用積分に基づく正準形式が構成され，そこで得られた拘束条件が系統的に第一類と第二類に分類された．その後，第二類拘束条件は，ディラック括弧を定義し正準変数を減らすことで処理された．また，量子化の手続きを実行した後，第一類拘束条件は，物理的状態を定義する条件式として読み換えられた．その結果，得られた連立微分方程式を解くことで，平面波解 $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ が導かれた．この解 $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ と係数関数 $\tilde{F}^{+}$ を用いて，正振動数のスピナー形式で書かれた波動関数 $\Psi^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ が構成された．同様に，平面波解 $\bar{\Phi}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ と係数関数 $\tilde{F}^{-}$ を用いて，負振動数のスピナー形式で書かれた波動関数 $\Psi^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ が構成された．このとき，$\Psi^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ は前方管状領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^{+}$ 内で明確に定義され，$\Psi^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ は後方管状領域 $\mathbb{C}\mathbf{M}^{-}$ 内で明確に定義されることが示された．また，$\Psi^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ と $\Psi^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ はそれぞれ，一般化されたワイル方程式 (2.5.7a) と (2.5.7b) を満たすスピナー場であることがわかった．さらに，スピナー場 $\Psi^{+}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ と $\Psi^{-}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ はそれぞれ，係数関数 $\tilde{F}^{+}$ と $\tilde{F}^{-}$ に対して適切なフーリエ・ラプラス変換を行うことで，ツイスター関数 F^{+} と F^{-} のペンローズ変換として表された．そして，スピナー形式で書かれた波動関数を生成する指数型母関数 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ が構成され，スピナー形式で書かれた波動関数に対する新たな表示 (2.6.12) が求められた．この表示は，共形反転変換された時空座標 $\frac{1}{2}(z^{-1})^{\mu}$ の関数であることがわかった．

本研究では，式 (2.5.8)，式 (2.5.11)，式 (2.5.23)，式 (2.5.25) のような 2 重の周回積分が形式的に与えられた．そのため，本研究での議論を厳密に取り扱うためには，これらの周回積分を高次元での複素解析を用いて定式化する必要がある．また，式 (2.4.6) と式 (2.4.7) によって定まる関数空間もしくはヒルベルト空間に関する考察はされなかった．しかしながら，文献 [46] において，ツイスター量子化におけるヒルベルト空間の性質が詳しく調べられているので，式 (2.4.6) と式 (2.4.7) で定義された表示がヒルベルト空間内で成り立つことが期待される．

今後の課題として，スピンを持つ無質量粒子のツイスター模型に時空上のゲージ場の相互作用を取り入れ，その古典力学と量子力学を考察をすることが挙げられる．また，スピンを持つ有質量粒子も記述できるように，ゲージ化された白藤の作用積分を拡張することも重要な課題である．(このような拡張についての研究は文献 [63] ですでに述べられている．さらに，ツイスター変数で表現されたスピンを持つ有質量粒子模型の考察が文献 [59, 64–67] で行われている．)

第3章　剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式

剛性を持つ無質量粒子模型と呼ばれる相対論的な点粒子の模型がある．この模型を記述するラグランジアンは，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンと呼ばれ，点粒子が描く世界線の外曲率を基に構成されている．本章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を導出し，その作用積分が，第2章で議論されたゲージ化された白藤の作用積分に一致することを証明する．まず，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンと等価な1次形式のラグランジアンを与える．次に，1次形式のラグランジアンを時空座標とスピナー変数を用いて書き換えることで，スピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを求める．さらに，このラグランジアンをツイスター変数を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子の作用積分を導く．すると，この作用積分はゲージ化された白藤の作用積分に一致することがわかる．

3.1　導入

4次元時空における剛性を持つ粒子模型が，現在まで，多様な観点から研究されている [7–22, 24, 68]．この模型を記述する作用積分は，点粒子が描く世界線の外曲率を基に構成される．実際に，世界線の外曲率を $K = K(l)$ とすると，剛性を持つ粒子の作用積分は次のように与えられる:

$$\mathcal{S} := \int_{l_0}^{l_1} dl \left(-m - kK^{\gamma} \right) . \tag{3.1.1}$$

ここで，l は点粒子が描く世界線の弧長パラメーター，m, k, γ は実定数である[1]．剛性を持つ粒子模型は，式 (3.1.1) において m を $m = 0$ か $m \neq 0$ のどちらかに

[1]式 (3.1.1) をより一般化した作用積分 $\mathcal{S}_F = \int_{l_0}^{l_1} dl F(K)$ の考察も Plyushchay によって行われている [21]．ここで，F は外曲率 K の任意関数である．また，そのような作用積分の D 次元時空上での考察が Nesterenko たちによって行われている [22].

決め，γ の値を指定することで定められる．特に，$\gamma = 1$ のときの模型がいままで最もよく研究されている [7–16]．さらにこれらの中で，$m = 0$ とおいたときの剛性を持つ無質量粒子模型は，物理的な観点からよく理解されている．実際に，Plyushchay は，この模型がヘリシティー k のスピンを持つ無質量粒子を記述することを示した [11, 12]．(ただし，Plyushchay が考察した作用積分は式 (3.1.1) の k を $-|k|$ に置き換えたものである．) Plyushchay が導いた結果を考慮すると，剛性を持つ無質量粒子模型を記述するラグランジアン $L_0(l) := -|k|K$ は，(可換な) スピナー変数とツイスター変数を用いて書き換えられるという考えが得られる．なぜなら，これらの変数は，スピンを持つ無質量粒子を記述するのに有効な力学変数だからである (第 2 章参照)．本章では，白藤によって展開されたツイスター変数で表現されたスピンを持たない無質量粒子のラグランジアンを導く方法 (白藤の方法) [40] に従い，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを導く．

はじめに，白藤の方法を剛性を持つ無質量粒子模型に適用するために，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン L_0 と等価な 1 次形式のラグランジアンを与える．また，実際に 1 次形式のラグランジアンが L_0 に等しいことを示す．次に，1 次形式のラグランジアンから得られる拘束条件の解を 2 成分スピナーを用いて書き下す．この解を 1 次形式のラグランジアンに代入すると，時空座標とスピナー変数を用いて書かれた剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンが導かれる．このラグランジアンは，第 2 章で議論されたラグランジアン (2.2.11) に一致することがわかる．さらに，時空座標とスピナー変数を用いて書かれたラグランジアンをツイスター変数を用いて書き換えると，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンが導出される．このようにして得られたラグランジアンから定まる作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分 [53] に一致することが証明される．

本章は次のように構成されている: 第 3.2 節では，白藤の方法の簡単な解説を行う．第 3.3 節では，白藤の方法を剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンに適用するために，剛性を持つ無質量粒子の 1 次形式のラグランジアンを与える．第 3.4 節では，1 次形式のラグランジアンを基に剛性を持つ無質量粒子のスピナー形式を導く．第 3.5 節では，剛性を持つ無質量粒子のスピナー形式を基に剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を導出する．第 3.6 節では，本章のまとめを行い，今後の課題を述べる．第 3.7 節では，補足として，本研究で必要な不等式を証明し，無質量粒子のツイスター量子化を行う．

3.2 スピンを持たない無質量粒子に対する白藤の方法

この節では，白藤の方法 [40] に従って，ツイスター変数で表現されたスピンを持たない無質量粒子のラグランジアンを導出する．

4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上を運動する点粒子の時空座標を $x^\mu = x^\mu(\tau)$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ とする．ここで，τ $(\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1)$ は粒子が描く世界線に沿った任意のパラメーターであり，$dx^0/d\tau > 0$ とする．また，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ である．いま，質量 m の相対論的自由粒子のラグランジアンは

$$L_f = -m\sqrt{\dot{x}^2} \tag{3.2.1}$$

と与えられる．ここで，変数の上のドット記号は τ に関する微分を表している．式 (3.2.1) は $m = 0$ のとき $L_f = 0$ になるので，ラグランジアン (3.2.1) は無質量粒子を記述できないことがわかる．そこで，1 次元パラメーター空間 $\mathcal{T} := \{\tau | \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1\}$ 上の補助場 $a = a(\tau)$ を導入して，ラグランジアン (3.2.1) を

$$L_f = -\frac{1}{2a}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m^2 a \tag{3.2.2}$$

と書き換える．式 (3.2.2) が式 (3.2.1) と古典的に等価であることは，次のように示すことができる．式 (3.2.2) の a に関するオイラー・ラグランジュ方程式から

$$a = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m} \tag{3.2.3}$$

が得られるので，この式を式 (3.2.2) に代入するとラグランジアン (3.2.2) は

$$L_f = -m\sqrt{\dot{x}^2} \tag{3.2.4}$$

となり，ラグランジアン (3.2.1) に帰着する．したがって，式 (3.2.2) は式 (3.2.1) と古典的に等価であることが示された．さらに，パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の補助場 $p^\mu = p^\mu(\tau)$ を導入して，式 (3.2.2) を

$$L_f = -\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{1}{2}a\left(p_\mu p^\mu - m^2\right) \tag{3.2.5}$$

と書き換える．式 (3.2.5) から補助場 p^μ を同様の手順で消去することで，式 (3.2.5) は式 (3.2.2) と古典的に等価であることが示される．

式 (3.2.5) で $m = 0$ とおくと，スピンを持たない無質量粒子の 1 次形式のラグランジアンが次のように得られる:

$$L_f = -\dot{x}^\mu p_\mu + \frac{1}{2}a p_\mu p^\mu \,. \tag{3.2.6}$$

このラグランジアンは，$\dot{x}^\mu$ について1次式になっている．式 (3.2.6) の補助場 a に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$p_\mu p^\mu = 0 \tag{3.2.7}$$

となる．方程式 (3.2.7) の解を，2成分スピナー $\bar{\pi}_\alpha = \bar{\pi}_\alpha(\tau)$ $(\alpha = 0, 1)$ とその複素共役 $\pi_{\dot{\alpha}} = \pi_{\dot{\alpha}}(\tau)$ $(\dot{\alpha} = \dot{0}, \dot{1})$ を用いて，

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\pi}_\alpha \pi_{\dot{\alpha}} \tag{3.2.8}$$

と書き下す．ここで，$p_{\alpha\dot{\alpha}}$ は p_μ の2階のスピナーである[2]．また，式 (3.2.8) が方程式 (3.2.7) の解であることは，実際に解を代入して2成分スピナーの性質 $\bar{\pi}_\alpha \bar{\pi}^\alpha = \pi_{\dot{\alpha}} \pi^{\dot{\alpha}} = 0$ を用いることで確かめられる．式 (3.2.8) を式 (3.2.6) に代入すると，スピナー変数で表現されたスピンを持たない無質量粒子のラグランジアンが

$$L_f = -\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\pi}_\alpha \pi_{\dot{\alpha}} \tag{3.2.9}$$

と得られる [40].

いま，2成分スピナー ω^α とその複素共役 $\bar{\omega}^{\dot{\alpha}}$ を

$$\omega^\alpha := i x^{\alpha\dot{\alpha}} \pi_{\dot{\alpha}}\,, \tag{3.2.10a}$$

$$\bar{\omega}^{\dot{\alpha}} := -i x^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\pi}_\alpha \tag{3.2.10b}$$

と定義し，ラグランジアン (3.2.9) を

$$L_f = i\left(\bar{\pi}_\alpha \dot{\omega}^\alpha + \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} \dot{\pi}_{\dot{\alpha}}\right) \tag{3.2.11}$$

と書き換える．さらに，ツイスター変数 X^A $(A = 0, 1, 2, 3)$ とその双対ツイスター変数 $\bar{X}_A$ を

$$X^A := \left(\omega^\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}\right)\,, \quad \bar{X}_A := \left(\bar{\pi}_\alpha, \bar{\omega}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{3.2.12}$$

と定義すると，ラグランジアン (3.2.11) は

$$L_f = i\bar{X}_A \dot{X}^A = \frac{i}{2}\left(\bar{X}_A \dot{X}^A - X^A \dot{\bar{X}}_A\right) \tag{3.2.13}$$

[2] 2階のスピナー $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ と4元ベクター p_μ の間には次の関係式が成り立つ [69]:

$$\begin{pmatrix} p_{0\dot{0}} & p_{0\dot{1}} \\ p_{1\dot{0}} & p_{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}.$$

また，$p_{\alpha\dot{\alpha}}$ は，p_μ が実数である場合に限り，エルミート行列になる．

と書き換えられる．最後の式変形で，全微分項が作用積分に影響を与えないことから，$\frac{i}{2}\frac{d}{d\tau}(\bar{X}_A X^A)$ を無視した．さて，式 (3.2.12) と式 (3.2.10) を用いると，

$$\bar{X}_A X^A = 0 \tag{3.2.14}$$

と計算できるので，ツイスター変数 X^A と $\bar{X}_A$ はナルツイスター条件を満たしていることがわかる．このことは，ツイスター理論においてラグランジアン (3.2.13) がスピンを持たない粒子を記述することを意味している [40–42]．したがって，式 (3.2.13) は，ツイスター変数で表現されたスピンを持たない無質量粒子のラグランジアンである．第 3.4 節と第 3.5 節において，このスピンを持たない無質量粒子のツイスター形式を構築する白藤の方法を剛性を持つ無質量粒子模型に適用する．

3.3 剛性を持つ無質量粒子の 1 次形式のラグランジアン

この節では，第 3.2 節で述べた白藤の方法を実際に剛性を持つ無質量粒子の模型に適用するために，剛性を持つ無質量粒子の 1 次形式のラグランジアンを与える．

パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実場 $q^\mu = q^\mu(\tau), p^\mu = p^\mu(\tau), r^\mu = r^\mu(\tau), e = e(\tau), c = c(\tau)$ を一般化座標として採用し，次の作用積分を考える:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L\,, \tag{3.3.1}$$

$$L = (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - (\dot{q}^\mu - cq^\mu)r_\mu + 2e(\pm\sqrt{q^2r^2} - k)\,. \tag{3.3.2}$$

ただし，$q^2 \neq 0$ とする．また，$q^2 := q_\mu q^\mu, r^2 := r_\mu r^\mu$ であり，k は無次元の定数である．いま，パラメーター τ の付け替え

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau) \quad \left(\frac{d\tau'}{d\tau} > 0\right) \tag{3.3.3}$$

のもとでの場 $q_\mu, p_\mu, r_\mu, e, c$ の変換がそれぞれ，次のように与えられるとする:

$$q_\mu(\tau) \to q'_\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}q^\mu(\tau)\,, \tag{3.3.4a}$$

$$p_\mu(\tau) \to p'_\mu(\tau') = p_\mu(\tau)\,, \tag{3.3.4b}$$

$$r_\mu(\tau) \to r'_\mu(\tau') = \frac{d\tau'}{d\tau}r_\mu(\tau)\,, \tag{3.3.4c}$$

$$e(\tau) \to e'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}e(\tau)\,, \tag{3.3.4d}$$

$$c(\tau) \to c'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}c(\tau) + \frac{d\tau'}{d\tau}\frac{d^2\tau}{d\tau'^2}\,. \tag{3.3.4e}$$

このとき，ラグランジアン (3.3.2) に含まれている $\nabla q^\mu := \dot{q}^\mu - cq^\mu$ の変換は，次のような一次変換になる:

$$\begin{aligned}\nabla q^\mu(\tau) \to \nabla' q'^\mu(\tau') &= \frac{dq'^\mu(\tau')}{d\tau'} - c'(\tau')q'^\mu(\tau') \\ &= \left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)^2 \nabla q^\mu(\tau)\,. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

この式から，場 b はゲージ場の役割を果たしていることがわかる．さて，時空座標 x^μ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実スカラー場であるので，パラメーターの付け替えのもとでの x^μ の変換は

$$x_\mu(\tau) \to x'_\mu(\tau') = x_\mu(\tau) \tag{3.3.6}$$

と与えられる．この式を用いると，パラメーターの付け替えのもとでの $\dot{x}_\mu$ の変換が

$$\dot{x}_\mu(\tau) \to \dot{x}'_\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{x}_\mu(\tau) \tag{3.3.7}$$

と求まる．式 (3.3.7)，式 (3.3.6)，式 (3.3.4) を用いると，作用積分 S はパラメーターの付け替えのもとで不変であることを示すことができる．ここで，ラグランジアン (3.3.2) は $\dot{x}^\mu$ と $\dot{q}^\mu$ について 1 次式になっていることを指摘しておく．また，ラグランジアン (3.3.2) には p_μ, r_μ, e, c の運動項が含まれていないので，p_μ, r_μ, e, c は独立な補助場の役割を果たしていることがわかる．

ラグランジアン (3.3.2) の $x^\mu, q^\mu, p_\mu, r_\mu, e, c$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ次のようになる:

$$\dot{p}_\mu = 0\,, \tag{3.3.8a}$$

$$\dot{r}_\mu + p_\mu + cr_\mu \pm \frac{2er^2}{\sqrt{q^2r^2}}q_\mu = 0\,, \tag{3.3.8b}$$

$$\dot{x}^\mu - q^\mu = 0\,, \tag{3.3.8c}$$

$$\dot{q}^\mu - cq^\mu \mp \frac{2eq^2}{\sqrt{q^2r^2}}r^\mu = 0\,, \tag{3.3.8d}$$

$$\pm\sqrt{q^2r^2} - k = 0\,, \tag{3.3.8e}$$

$$q^\mu r_\mu = 0\,. \tag{3.3.8f}$$

式 (3.3.8a)–(3.3.8d) にはパラメーター τ の微分項が含まれていて，一方，式 (3.3.8e) と式 (3.3.8f) には含まれていないことがわかる．したがって，式 (3.3.8e) と式 (3.3.8f) は拘束条件であることが言える．また，式 (3.3.8e) は，k の正負が $\pm\sqrt{q^2r^2}$ の符号の選択に依存して決まることを示している．式 (3.3.8e) の両辺を τ で微分し，式 (3.3.8b) と式 (3.3.8d) を用いると，

$$q^2 r^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.9}$$

が得られる．ここで，q^2 は条件式 $q^2 \neq 0$ を満たしているので，式 (3.3.9) は

$$r^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.10}$$

となる．同様に，式 (3.3.8f) の両辺を τ で微分し，式 (3.3.8b) と式 (3.3.8d) を用いると，

$$q^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.11}$$

が導出される．次に，式 (3.3.11) の両辺を τ 微分し，式 (3.3.8a) を用いると，

$$\dot{q}^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.12}$$

が求まる．式 (3.3.12) の左辺に式 (3.3.8d)，式 (3.3.10)，式 (3.3.11) を用いると，式 (3.3.12) は恒等的に 0 であることが確かめられる．このことは，式 (3.3.11) から新たな拘束条件が現れないことを意味している．さて，式 (3.3.10) の両辺を τ で微分し，式 (3.3.8a)，式 (3.3.8b)，式 (3.3.10)，式 (3.3.11) を用いると，

$$p^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.13}$$

が導かれる．式 (3.3.13) の両辺を τ で微分すると，式 (3.3.13) は

$$\dot{p}^\mu p_\mu = 0 \tag{3.3.14}$$

となる．式 (3.3.14) は，式 (3.3.8a) を用いると恒等的に 0 になるので，式 (3.3.13) から新たな拘束条件は現れないことがわかる．以上のことから，ラグランジアン (3.3.2) から得られるすべての拘束条件は，式 (3.3.8e) と式 (3.3.8f) に加えて，式 (3.3.10)，式 (3.3.11)，式 (3.3.13) であることがことが結論される．

式 (3.3.8d) を用いて式 (3.3.2) から補助場 r_μ を消去すると，

$$L = (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - 2ke \tag{3.3.15}$$

が得られる．このとき補助場 e はもはや，独立変数ではなく式 (3.3.8d) から定まる従属変数になる．実際に，e は次の手順によって定まる．まず，式 (3.3.8d) の両辺に q_μ を乗じて内積をとり，式 (3.3.8f) を用いると，

$$c = \frac{q\dot{q}}{q^2} \tag{3.3.16}$$

が求まる．ここで，$q\dot{q} := q_\mu \dot{q}^\mu$ である．その後，式 (3.3.16) と式 (3.3.8d) を用いると，次の式が導かれる:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{1}{4q^2}\left(\dot{q}_\mu - bq_\mu\right)\left(\dot{q}^\mu - bq^\mu\right) \\ &= \frac{\dot{q}_\perp^2}{4q^2}\,. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

ここで，$\dot{q}_\perp^2 := \dot{q}_{\perp\mu}\dot{q}_\perp^\mu$ であり，

$$\dot{q}_\perp^\mu := \dot{q}^\mu - q^\mu \frac{q\dot{q}}{q^2} \tag{3.3.18}$$

を定義した．このようにして，補助場 e は

$$e = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\dot{q}_\perp^2}{q^2}} \tag{3.3.19}$$

と定まる．補助場 e は実数でなければならないので，式 (3.3.19) 右辺の根号の中に関して次の 2 つの場合が考えられる: (a) $q^2 > 0, \dot{q}_\perp^2 \geq 0$，(b) $q^2 < 0, \dot{q}_\perp^2 \leq 0$. いま，

$$q^2\dot{q}_\perp^2 = q^2\dot{q}^2 - (q\dot{q})^2 \tag{3.3.20}$$

と計算できるので，(a) と (b) の両方の場合で $q^2\dot{q}^2 \geq (\dot{q}q)^2$ が成り立つ．さらに，q^μ が時間的なとき ($q^2 > 0$)，$q^2\dot{q}^2 \leq (q\dot{q})^2$ が成り立つことを示すことができる (第 3.7.1 項参照)．これらのことから，(a) の場合は，$q^2\dot{q}^2 \geq (\dot{q}q)^2$ と $q^2\dot{q}^2 \leq (\dot{q}q)^2$ が同時に成り立つ必要がある．このことは，運動方程式とは無関係に，任意の $\tau\,(\in \mathcal{T})$ に対して $q^2\dot{q}^2 = (\dot{q}q)^2$ が成り立つことを示している．しかしながら，等式 $q^2\dot{q}^2 = (\dot{q}q)^2$ は $\dot{q}_\perp^2 = 0$ を与えるので，(a) の場合は $S = 0$ になり，物理的に意味のない模型が導かれる．したがって，(a) の場合は適さないことが結論されるので，以下では (b) の場合を採用して考察を進めていく．ただし，ラグランジアン (3.3.2) に含まれている $\sqrt{q^2r^2}$ を考慮して，ラグランジアン (3.3.2) が実関数となるように r^μ に対して条件 $r^2 < 0$ を課す．

式 (3.3.15) に式 (3.3.19) を代入すると，ラグランジアン (3.3.15) は

$$L = (q^{\mu} - \dot{x}^{\mu})p_{\mu} \mp k\sqrt{\frac{\dot{q}_{\perp}^{2}}{q^{2}}} \tag{3.3.21}$$

となる．式 (3.3.21) から式 (3.3.8c) を用いて q^{μ} と p_{μ} を消去すると，式 (3.3.21) は次のようになる:

$$\begin{aligned} L &= \mp k\sqrt{\frac{\ddot{x}_{\perp}^{2}}{\dot{x}^{2}}} \\ &= \mp k\frac{\sqrt{\dot{x}^{2}\ddot{x}^{2} - (\dot{x}\ddot{x})^{2}}}{-\dot{x}^{2}}\,. \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

ここで，$\dot{x}\ddot{x} := \dot{x}_{\mu}\ddot{x}^{\mu}$ であり，

$$\ddot{x}_{\perp}^{\mu} := \ddot{x}^{\mu} - \dot{x}^{\mu}\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{x}^{2}} \tag{3.3.23}$$

である．いまは (b) の場合を採用しているので，式 (3.3.22) における $\dot{x}^2$ と $\ddot{x}_{\perp}^2$ は $\dot{x}^2 < 0$ と $\ddot{x}_{\perp}^2 < 0$ を満たしている．また，式 (3.3.21) と式 (3.3.22) における符号 $\pm$ は，k の正負と組み合わせて結果的にラグランジアンが負になるように選ばれる．すなわち，$\mp k = -|k|$ になる．すると，ラグランジアン (3.3.22) は

$$L = -|k|\sqrt{\frac{\ddot{x}_{\perp}^{2}}{\dot{x}^{2}}} \tag{3.3.24}$$

となる．式 (3.3.24) は τ の関数として表したときの剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン $L(\tau) = \sqrt{-\dot{x}^2}L_0 = -|k|\sqrt{-\dot{x}^2}K$ にほかならない [10–13]．(このとき，$\mp k = -|k|$ は式 (3.3.8e) と両立し，矛盾のない結果 $\sqrt{q^2 r^2} = |k|$ を与える．) さて，式 (3.3.24) を導く過程で現れた条件 $\dot{x}^2 < 0$ は，粒子が光速よりもはやい速さで運動することを意味している．この運動は，スピンを持つ無質量粒子のツィッターベベーグング (Zitterbewegung) の古典的対応物として解釈されている [70]．ラグランジアン (3.3.24) は，パラメーターの付け替えのもとで不変な作用積分 (3.3.1) を基に導かれている．このことから期待されるように，ラグランジアン (3.3.24) から定まる作用積分 $S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L$ もまたパラメーターの付け替えのもとで不変である．ここでは，1 次形式のラグランジアン (3.3.2) から補助場 p_{μ}, r_{μ}, e, b を消去し，さらに q^{μ} を消去することで，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.3.22) が導かれた．このことは，1 次形式のラグランジアン (3.3.2) が剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンと古典的に等価であることを意味している．したがって，$\dot{x}^{\mu}$ と $\dot{q}^{\mu}$ について 1 次式の剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを構成することができた．

3.4 剛性を持つ無質量粒子のスピナー形式

この節では，第 3.2 節で 1 次形式のラグランジアン (3.2.6) から式 (3.2.8) を導いたのと同様の手順で，剛性を持つ無質量粒子の 1 次形式のラグランジアンからスピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを導出する．

まず，1 次形式のラグランジアン (3.3.2) は，2 階のスピナーを用いると次のように書き換えられる:

$$L = (q^{\alpha\dot{\alpha}} - \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}})p_{\alpha\dot{\alpha}} - (\dot{q}^{\alpha\dot{\alpha}} - cq^{\alpha\dot{\alpha}})r_{\alpha\dot{\alpha}} + 2e(\pm\sqrt{q^2r^2} - k)\,. \tag{3.4.1}$$

ここで，$q^2 := q_{\alpha\dot{\alpha}}q^{\alpha\dot{\alpha}}$，$r^2 := r_{\alpha\dot{\alpha}}r^{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha = 0, 1; \dot{\alpha} = \dot{0}, \dot{1})$ である．次に，拘束条件 (3.3.13)，(3.3.11)，(3.3.10)，(3.3.8f) はそれぞれ，2 階のスピナーを用いると次のように表すことができる:

$$p^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}} = 0\,, \tag{3.4.2a}$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}} = 0\,, \tag{3.4.2b}$$

$$r^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}} = 0\,, \tag{3.4.2c}$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}} = 0\,. \tag{3.4.2d}$$

この拘束条件の解は，2 成分スピナー $\bar{\varpi}_\alpha = \bar{\varpi}_\alpha(\tau), \chi_\alpha = \chi_\alpha(\tau)$ とその複素共役 $\varpi_{\dot{\alpha}} = \varpi_{\dot{\alpha}}(\tau), \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\tau)$ を用いて次のように書き下せる:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\varpi}_\alpha\varpi_{\dot{\alpha}}\,, \tag{3.4.3}$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}} = f(\bar{\varpi}^\alpha\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} + \chi^\alpha\varpi^{\dot{\alpha}})\,, \tag{3.4.4}$$

$$r_{\alpha\dot{\alpha}} = ig(\bar{\varpi}_\alpha\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} - \chi_\alpha\varpi_{\dot{\alpha}})\,. \tag{3.4.5}$$

ここで，$f = f(\tau)$ と $g = g(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の任意の実関数である．また，式 (3.4.3)–(3.4.5) が実際に拘束条件 (3.4.2) の解であることは，任意の点なしのスピナー変数 $\iota_\alpha, \kappa_\alpha$ が $\iota^\alpha\kappa_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\iota_\beta\kappa_\alpha = \iota^\alpha\kappa^\beta\epsilon_{\beta\alpha}$ を満たすこととその複素共役 $\bar{\iota}_{\dot{\alpha}}, \bar{\kappa}_{\dot{\alpha}}$ も同様の式を満たすことを用いれば，示すことができる．ここで，レビ・チビタの記号 $\epsilon^{\alpha\beta}$ と $\epsilon_{\alpha\beta}$ は $\epsilon^{01} = \epsilon_{01} = 1$ と与えられる．いま，$\bar{\varpi}_\alpha, \varpi_{\dot{\alpha}}, \chi^\alpha, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ をパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素スカラー場とする．また，パラメーターの付け替えのも

とでの f と g の変換が

$$f(\tau) \to f'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} f(\tau), \tag{3.4.6}$$

$$g(\tau) \to g'(\tau') = \frac{d\tau'}{d\tau} g(\tau) \tag{3.4.7}$$

と与えられるとする．すると，パラメーターの付け替えのもとでの式 (3.4.3)，式 (3.4.4)，式 (3.4.5) の変換はそれぞれ，変換則 (3.3.4b)，(3.3.4a)，(3.3.4c) と両立することがわかる．

式 (3.4.4) と式 (3.4.5) を用いると，次の式が得られる:

$$q^2 = -2f^2 |\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha|^2 \,, \tag{3.4.8}$$

$$r^2 = -2g^2 |\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha|^2 \,. \tag{3.4.9}$$

このとき，$\bar{\varpi}_\alpha$ と χ_α は互いに一次独立なので，$r^2 \neq 0$ と $q^2 \neq 0$ が成り立つ．また，式 (3.4.8) と式 (3.4.9) から，式 (3.4.3) と式 (3.4.4) は第 3.3 節の (b) の場合で課された条件 $q^2 < 0$ と $r^2 < 0$ を自動的に満たしていることが確かめられる．いま，式 (3.4.1) に式 (3.4.3)，式 (3.4.4)，式 (3.4.5)，式 (3.4.8)，式 (3.4.9) を代入すると，

$$\begin{aligned} L = &- \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\varpi}_\alpha \varpi_{\dot{\alpha}} - ifg \left(\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} \chi^\alpha \dot{\bar{\varpi}}_\alpha - \chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \dot{\varpi}_{\dot{\alpha}} - \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} \dot{\chi}^\alpha \bar{\varpi}_\alpha + \chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha \dot{\bar{\chi}}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} \right) \\ &+ 2e \left\{ \pm 2|fg| \left(\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} \right) - k \right\} \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

が得られる．ここで，$\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha$ は τ の複素関数なので，$\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha$ の絶対値 $R := |\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha|$ と偏角 $\Theta := \arg(\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha)$ を用いて，

$$\chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha = Re^{i\Theta} \tag{3.4.11}$$

と表すことができる．いま，$\varphi(+) := 0, \varphi(-) := \pi$ とし，関数 f と g の間に関係式

$$fg = \pm \frac{1}{2R} = \frac{\exp\{i\varphi(\pm)\}}{2R} \quad \text{(複合同順)} \tag{3.4.12}$$

を与える．このとき関係式 (3.4.12) は，変換則 (3.4.6) と (3.4.7) に整合的である．式 (3.4.12) を式 (3.4.10) に代入すると，式 (3.4.10) は次のようになる:

$$\begin{aligned} L = &-\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\varpi}_\alpha \varpi_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2} \left(e^{-i\Phi(\pm)} \chi^\alpha \dot{\bar{\varpi}}_\alpha - e^{i\Phi(\pm)} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \dot{\varpi}_{\dot{\alpha}} - e^{-i\Phi(\pm)} \dot{\chi}^\alpha \bar{\varpi}_\alpha + e^{i\Phi(\pm)} \dot{\bar{\chi}}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} \right) \\ &+ e \left(e^{-i\Phi(\pm)} \chi^\alpha \bar{\varpi}_\alpha + e^{i\Phi(\pm)} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \varpi_{\dot{\alpha}} - 2k \right) \,. \end{aligned} \tag{3.4.13}$$

ここで，$\Phi(\pm) := \Theta - \varphi(\pm)$ とした．新たなスピナー変数を

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_\alpha &:= e^{-i\frac{\Phi(\pm)}{2}}\bar{\varpi}_\alpha\,, \quad \pi_{\dot\alpha} := e^{i\frac{\Phi(\pm)}{2}}\varpi_{\dot\alpha}\,, \\ \psi^\alpha &:= e^{-i\frac{\Phi(\pm)}{2}}\chi^\alpha\,, \quad \bar{\psi}^{\dot\alpha} := e^{i\frac{\Phi(\pm)}{2}}\bar{\chi}^{\dot\alpha} \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

と定義すると，式 (3.4.13) は次のように書き換えられる:

$$\begin{aligned} L = &-\dot{x}^{\alpha\dot\alpha}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot\alpha} \\ &-\frac{i}{2}\Bigg\{\psi^\alpha\left(\dot{\bar{\pi}}_\alpha + \frac{i}{2}\frac{d\Phi(\pm)}{d\tau}\bar{\pi}_\alpha\right) - \bar{\psi}^{\dot\alpha}\left(\dot{\pi}_{\dot\alpha} - \frac{i}{2}\frac{d\Phi(\pm)}{d\tau}\pi_{\dot\alpha}\right) \\ &-\left(\dot{\psi}^\alpha + \frac{i}{2}\frac{d\Phi(\pm)}{d\tau}\psi^\alpha\right)\bar{\pi}_\alpha + \left(\dot{\bar{\psi}}^{\dot\alpha} - \frac{i}{2}\frac{d\Phi(\pm)}{d\tau}\bar{\psi}^{\dot\alpha}\right)\pi_{\dot\alpha}\Bigg\} \\ &+ e\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} - 2k\right)\,. \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

式 (3.4.15) には $\frac{d\Phi(\pm)}{d\tau}$ を含む項が 4 つ現れているが，これらの項は互いに打ち消し合うので，式 (3.4.15) は結果的に次のようになる:

$$\begin{aligned} L = &-\dot{x}^{\alpha\dot\alpha}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot\alpha} - \frac{i}{2}\left(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha - \bar{\psi}^{\dot\alpha}\dot{\pi}_{\dot\alpha} - \dot{\psi}^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \dot{\bar{\psi}}^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\right) \\ &+ e\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha} - 2k\right)\,. \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

さて，新たなスピナー変数 (3.4.14) を用いると，式 (3.4.3)–(3.4.5) は次のように書ける:

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot\alpha}\,, \tag{3.4.17}$$

$$q^{\alpha\dot\alpha} = f(\bar{\pi}^\alpha\bar{\psi}^{\dot\alpha} + \psi^\alpha\pi^{\dot\alpha})\,, \tag{3.4.18}$$

$$r_{\alpha\dot\alpha} = ig(\bar{\pi}_\alpha\bar{\psi}_{\dot\alpha} - \psi_\alpha\pi_{\dot\alpha})\,. \tag{3.4.19}$$

このとき，fg は $fg = \pm\frac{1}{2}|\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha|^{-1}$ を満たす．式 (3.4.17)–(3.4.19) は，形式的には連立方程式 (3.4.2) の解 (3.4.3)–(3.4.5) と変わらないので，新たなスピナー変数を用いて書かれた $p_{\alpha\dot\alpha}$, $q^{\alpha\dot\alpha}$, $r_{\alpha\dot\alpha}$ もまた連立方程式 (3.4.2) の解である．ラグランジアン (3.4.16) は，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.3.24) を導いたのと同様に，1 次形式のラグランジアン (3.3.2) を基に古典的な計算だけで導かれている．このことは，ラグランジアン (3.4.16) がラグランジアン (3.3.24) と古典的に等価であることを示している．したがって，スピナー変数で表現された剛性を持つ無質量

粒子のラグランジアン (3.4.16) が得られた．さて，時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実スカラー場であるので，パラメーターの付け替えのもとでの $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ の変換は

$$x^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau) \to x'^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau') = x^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau) \tag{3.4.20}$$

と与えられる．また，スピナー変数 $\bar{\pi}_\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ もパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素スカラー場であるので，パラメーターの付け替えのもとでの $\bar{\pi}_\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}, \psi^\alpha, \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$ の変換はそれぞれ，次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\bar{\pi}_\alpha(\tau) \to \bar{\pi}'_\alpha(\tau') = \bar{\pi}_\alpha(\tau)\,, \quad \pi_{\dot{\alpha}}(\tau) \to \pi'_{\dot{\alpha}}(\tau') = \pi_{\dot{\alpha}}(\tau)\,, \\
&\psi_\alpha(\tau) \to \psi'_\alpha(\tau') = \psi_\alpha(\tau)\,, \quad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\tau) \to \bar{\psi}'_{\dot{\alpha}}(\tau') = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}(\tau)\,.
\end{aligned} \tag{3.4.21}$$

式 (3.4.20) と式 (3.4.21) から，パラメーターの付け替えのもとでの $\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\dot{\bar{\pi}}_\alpha, \dot{\pi}_{\dot{\alpha}}, \dot{\psi}^\alpha, \dot{\bar{\psi}}^{\dot{\alpha}}$ の変換はそれぞれ，次のように求まる:

$$\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau) \to \dot{x}'^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}(\tau)\,, \tag{3.4.22}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{\pi}}_\alpha(\tau) \to \dot{\bar{\pi}}'_\alpha(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{\bar{\pi}}_\alpha(\tau)\,, \quad \dot{\pi}_{\dot{\alpha}}(\tau) \to \dot{\pi}'_{\dot{\alpha}}(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}(\tau)\,, \\
&\dot{\psi}_\alpha(\tau) \to \dot{\psi}'_\alpha(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{\psi}_\alpha(\tau)\,, \quad \dot{\bar{\psi}}_{\dot{\alpha}}(\tau) \to \dot{\bar{\psi}}'_{\dot{\alpha}}(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\dot{\bar{\psi}}_{\dot{\alpha}}(\tau)\,.
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

式 (3.4.20)，式 (3.4.23)，式 (3.4.22)，式 (3.4.23)，式 (3.3.4d) を用いると，ラグランジアン (3.4.16) から定まる作用積分 $S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L$ は，パラメーターの付け替えのもとで不変であることを示すことができる．

いま，全微分項が作用積分に影響を与えないことから，$\frac{i}{2}\frac{d}{d\tau}\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}}\right)$ を無視すると，ラグランジアン (3.4.16) はより簡潔な次の式に帰着する:

$$L = -\dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}_\alpha\pi_{\dot{\alpha}} - i\left(\psi^\alpha\dot{\bar{\pi}}_\alpha - \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{\dot{\alpha}}\right) + e\left(\psi^\alpha\bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} - 2k\right)\,. \tag{3.4.24}$$

ラグランジアン (3.4.24) は第 2 章で考察されたラグランジアン (2.2.11) に一致している．そこで議論したように，ラグランジアン (3.4.24) はミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上のヘリシティー k のスピンを持つ無質量粒子を記述している．このことは，ラグランジアン (3.4.24) に等価なラグランジアン (3.3.24) もまたヘリシティー k のスピンを持つ無質量粒子を記述することを意味している．さらに，スピナー変数で表現されたラグランジアン (3.4.24) を基に正準形式を展開してその正準量子化を

実行すると，第 2 章で考察したように，スピナー型の平面波解が得られる．この平面波解と係数関数を用いることで，一般化されたワイル方程式を満たす 4 次元時空におけるスピナー場が求まる．同時に，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限されることが示される．このことは，ラグランジアン (3.3.24) に基づく古典力学系を量子化することで得られる結論 [12] に一致している．

3.5 剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式

この節では，第 3.4 節で導いたスピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを基にツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを導出する．

まず，式 (3.2.10) を拡張して 2 成分スピナー ω^α とその複素共役 $\bar{\omega}^{\dot{\alpha}}$ を

$$\omega^\alpha := i x^{\alpha\dot{\alpha}} \pi_{\dot{\alpha}} + \psi^\alpha , \tag{3.5.1a}$$

$$\bar{\omega}^{\dot{\alpha}} := -i x^{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\pi}_\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{3.5.1b}$$

と定義すると，ラグランジアン (3.4.16) は，ω^α, $\bar{\omega}^{\dot{\alpha}}$, $\pi_{\dot{\alpha}}, \bar{\pi}_\alpha$ を用いて，

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\pi}_\alpha \dot{\omega}^\alpha + \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} \dot{\pi}_{\dot{\alpha}} - \omega^\alpha \dot{\bar{\pi}}_\alpha - \pi_{\dot{\alpha}} \dot{\bar{\omega}}^{\dot{\alpha}}\right) + e\left(\bar{\pi}_\alpha \omega^\alpha + \bar{\omega}^{\dot{\alpha}} \pi_{\dot{\alpha}} - 2k\right) \tag{3.5.2}$$

と書き換えられる．この式には時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ が含まれていないことに注意する．いま，ツイスター変数 Z^A $(A = 0, 1, 2, 3)$ とその双対ツイスター変数 $\bar{Z}_A$ を

$$Z^A := \left(\omega^\alpha, \pi_{\dot{\alpha}}\right) , \quad \bar{Z}_A := \left(\bar{\pi}_\alpha, \bar{\omega}^{\dot{\alpha}}\right) \tag{3.5.3}$$

と定義し，Z^A と $\bar{Z}_A$ を用いてラグランジアン (3.5.2) を書き換えると，次の簡潔な作用積分が得られる:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2}\left(\bar{Z}_A \dot{Z}^A - Z^A \dot{\bar{Z}}_A\right) + e\left(\bar{Z}_A Z^A - 2k\right)\right] \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2}\left(\bar{Z}_A D Z^A - Z^A \bar{D} \bar{Z}_A\right) - 2ke\right] . \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

ここで，

$$D := \frac{d}{d\tau} - ie \tag{3.5.5}$$

を定義した．作用積分 (3.5.4) は，第 2.2 節で述べたゲージ化された白藤の作用積分にほかならない．式 (3.5.4) は，次の局所 U(1) ゲージ変換のもとで不変である:

$$Z^A \to Z'^A = \exp\{i\theta(\tau)\}\, Z^A\,, \tag{3.5.6a}$$

$$\bar{Z}_A \to \bar{Z}'_A = \exp\{-i\theta(\tau)\}\, \bar{Z}_A\,, \tag{3.5.6b}$$

$$e \to e' = e + \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}\,. \tag{3.5.6c}$$

ここで，$\theta = \theta(\tau)$ は実ゲージ関数である．式 (3.5.4) において，$\bar{Z}_A D Z^A$ と $Z^A \bar{D} \bar{Z}_A$ はそれぞれ，ゲージ変換 (3.5.6) のもとで不変であるが，一方，$\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau e$ は，ゲージ関数 $\theta(\tau)$ に境界条件 $\theta(\tau_0) = \theta(\tau_1)$ を課すことで，ゲージ変換 (3.5.6) のもとで不変になる．式 (3.5.6c) から，補助場 e はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の U(1) ゲージ場の役割を果たしていることがわかる．このような場 e で式 (3.5.4) を変分すると，

$$\frac{1}{2}\bar{Z}_A Z^A = k \tag{3.5.7}$$

が得られる．この式はツイスター変数 Z^A がナルツイスターではないことを表し，ツイスター理論において粒子がスピンを持つことを意味している．

次に，パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の正のスカラー場 $\lambda = \lambda(\tau)$ を導入し，ツイスター変数と双対ツイスター変数を Z^A と $\bar{Z}_A$ から

$$Z^A \to \sqrt{\lambda} Z^A\,, \quad \bar{Z}_A \to \sqrt{\lambda}\bar{Z}_A \tag{3.5.8}$$

にスケールを変更する．実際に式 (3.5.8) を式 (3.5.4) に対し実行すると，式 (3.5.4) は

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2}\lambda\left(\bar{Z}_A D Z^A - Z^A \bar{D}\bar{Z}_A\right) - 2ke\right] \tag{3.5.9}$$

となる．作用積分 (3.5.9) は，局所スケール変換と局所 U(1) ゲージ変換を組み合わせた次の複素局所スケール変換のもとで不変である [53]:

$$Z^A \to Z'^A = \exp\{\vartheta(\tau) + i\theta(\tau)\}\, Z^A\,, \tag{3.5.10a}$$

$$\bar{Z}_A \to \bar{Z}'_A = \exp\{\vartheta(\tau) - i\theta(\tau)\}\, \bar{Z}_A\,, \tag{3.5.10b}$$

$$e \to e' = e + \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}\,, \tag{3.5.10c}$$

$$\lambda \to \lambda' = \exp\{-2\vartheta(\tau)\}\, \lambda\,. \tag{3.5.10d}$$

ここで，$\vartheta = \vartheta(\tau)$ と $\theta = \theta(\tau)$ は実ゲージ関数である．式 (3.5.9) で $\lambda = 1$ とおくと S は式 (3.5.4) になるので，作用積分 (3.5.4) は作用積分 (3.5.9) の特別な場合であることが言える．作用積分 (3.5.9) が複素局所スケール変換 (3.5.10) のもとで不変であることは，作用積分 (3.5.9) がツイスター変数 Z^A そのものよりも射影ツイスター $[Z^A] := \left\{ cZ^A \middle| c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$ によって定義されていることを意味している．したがって，作用積分 (3.5.9) は射影ツイスター $[Z^A]$ を用いて記述される．この結果は，ツイスター理論の中でツイスター変数そのものよりも射影ツイスターの方がより本質的であるという事実と整合している．

こうしてスピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.4.16) から，式 (3.5.4) と式 (3.5.9) が導かれた．このことは，式 (3.5.4) と式 (3.5.9) がツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子の作用積分であることを意味している．作用積分 (3.5.4) に基づく古典力学系の正準量子化は，ツイスター量子化によって与えられることが知られている [41, 42, 46]．実際に，第 2 章で行われた量子化と同様の手順で，作用積分 (3.5.4) に基づく剛性を持つ無質量粒子の正準量子化を行うと，次数 $-2k-2$ のツイスター関数 $F(Z)$ が得られる．この関数は量子論における波動関数に相当しているので，1 価性を課すことは自然である．実際にツイスター関数 $F(Z)$ に 1 価性を課すと，次数 $-2k-2$ は整数値でなければならないので，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限される．この結果は，Plyushchay の結論 [12] に一致している．また，ツイスター関数 $F(Z)$ のペンローズ変換として，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場が求まる (第 3.7.2 項参照)．Plyushchay はこのようなスピナー場を導くには至らなかったが，本研究ではツイスター関数 $F(Z)$ のペンローズ変換としてスピナー場を導くことができる．

3.6 まとめと今後の課題

本研究では 1 次形式のラグランジアン (3.3.2) を基に，白藤の方法に従って，スピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを求めた．その後，このラグランジアンを基にツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンを導き，その作用積分がゲージ化された白藤の作用積分に一致することを証明した．

まず，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.3.24) に等価な 1 次形式のラ

グランジアン (3.3.2) が与えられた．その後，このラグランジアンから得られた拘束条件の解が 2 成分スピナー $\pi_{\dot{\alpha}}$ と ψ^{α} を用いて書き下された．この解を 1 次形式のラグランジアンに代入し，時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}, \psi^{\alpha}$ を用いて書き換えることで，スピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.4.16) が求められた．さらに，このラグランジアンを式 (3.5.3) で定義されたツイスター変数 Z^A を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子の作用積分 (3.5.4) と (3.5.9) が導出された．こうして得られた作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分 (2.2.2) に一致する．ここで，ラグランジアン (3.3.2) と (3.4.16) は $k=0$ とおくことで，スピンを持たない無質量粒子を記述することができる．これは，ラグランジアン (3.3.24) と異なる点である．

ツイスター変数で表現された作用積分を基に正準形式を展開し，剛性を持つ無質量粒子の正準量子化を実行すると，次数 $-2k-2$ のツイスター関数 $F(Z)$ が得られた．同時に，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限された．このことは Plyushchay の結論 [12] に一致しいてる．さらに，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場が，ツイスター関数のペンローズ変換として求められた．同様の結果は，スピナー変数で表現されたラグランジアンを基に正準形式を展開し，剛性を持つ無質量粒子の正準量子化を実行することでも得られる (第 2 章参照)．

本研究では，古典的な運動方程式を用いて，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.3.24) とスピナー変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン (3.4.16) が等価であることを示した．しかしながら，この等価性をより厳密に示すためには，量子論での等価性を調べる必要がある．本章では剛性を持つ無質量粒子模型を議論してきたが，剛性を持つ有質量粒子模型をツイスター変数で表し，それを基に剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を考察することも興味深い課題である．このことは，第 4 章で詳しく議論される．また，3 次元時空での捩率を持つ相対論的なラグランジアン [71] に対して本研究で用いた手法が適用できるかを考察することも今後の課題として挙げられる．

3.7 補遺

3.7.1 不等式 $u^2v^2 \leq (uv)^2$ の証明

まず，u^μ を $u^2 := u_\mu u^\mu > 0$ を満たすミンコフスキー空間上の時間的なベクターとし，v^μ をミンコフスキー空間上の任意のベクターとする．すると，u^μ が時間的なベクターであることから，$u^i\,(i=1,2,3)$ は $u^i = 0$ となるような静止系にとることができる．これより静止系における $u^2 = u_\mu u^\mu$ と $uv = u_\mu v^\mu$ はそれぞれ，$u^2 = (u^0)^2$ と $uv = u^0 v^0$ になる．したがって，次の式が成り立つことを示すことができる:

$$
\begin{aligned}
u^2v^2 - (uv)^2 &= (u^0)^2 \left\{ (v^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} v^i v^i \right\} - (u^0)^2 (v^0)^2 \\
&= -(u^0)^2 \sum_{i=1}^{3} v^i v^i \leq 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.7.1}
$$

ここで，u^2, v^2, uv はローレンツスカラーであることから，式 (3.7.1) は任意の基準系で成立することがわかる．以上から，不等式 $u^2v^2 \leq (uv)^2$ は証明された．

3.7.2 無質量粒子のツイスター量子化

ここでは，ツイスター変数で表現された作用積分 (3.5.4) に基づく正準形式を展開し，その後，無質量粒子の正準量子化を行う．

正準形式

作用積分 (3.5.4) から，ツイスター変数で表現されたヘリシティー k を持つ無質量粒子のラグランジアンは

$$
L = \frac{i}{2}\left(\bar{Z}_A \dot{Z}^A - Z^A \dot{\bar{Z}}_A\right) + e\left(\bar{Z}_A Z^A - 2k\right)\,. \tag{3.7.2}
$$

と与えられる．この節では，ラグランジアン (3.7.2) に基づく正準形式を展開する．

ラグランジアン (3.7.2) における一般化座標は $(Z^A, \bar{Z}_A, e)$ であり，これらに対応する一般化速度は $(\dot{Z}^A, \dot{\bar{Z}}_A, \dot{e})$ である．このとき，ラグランジアン (3.7.2) から導か

れる正準運動量は次式となる:

$$P_A := \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}^A} = \frac{i}{2}\bar{Z}_A\,, \tag{3.7.3a}$$

$$\bar{P}^A := \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{Z}}_A} = -\frac{i}{2}Z^A\,, \tag{3.7.3b}$$

$$P^{(e)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0\,, \tag{3.7.3c}$$

式 (3.7.3) と式 (3.7.2) を用いると，正準ハミルトニアン H_{C} は

$$H_{\mathrm{C}} := \dot{Z}^A P_A + \dot{\bar{Z}}_A \bar{P}^A + \dot{e}P^{(e)} - L = -e\left(\bar{Z}_A Z^A - 2k\right) \tag{3.7.4}$$

と与えられる．いま，正準座標 $(Z^A, \bar{Z}_A, e)$ とそれに対応する正準運動量 $(P_A, \bar{P}^A,$ $P^{(e)})$ を用いて，ポアソン括弧を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\{A, B\} :=& \left(\frac{\partial A}{\partial Z^A}\frac{\partial B}{\partial P_A} - \frac{\partial A}{\partial P_A}\frac{\partial B}{\partial Z^A}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{Z}_A}\frac{\partial B}{\partial \bar{P}^A} - \frac{\partial A}{\partial \bar{P}^A}\frac{\partial B}{\partial \bar{Z}_A}\right)\\ &+ \left(\frac{\partial A}{\partial e}\frac{\partial B}{\partial P^{(e)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(e)}}\frac{\partial B}{\partial e}\right)\,.\end{aligned} \tag{3.7.5}$$

式 (3.7.5) から，正準座標と正準運動量の間のポアソン括弧は次のようになる:

$$\left\{Z^A, P_B\right\} = \delta^A_B\,, \qquad \left\{\bar{Z}_A, \bar{P}^B\right\} = \delta^B_A\,, \tag{3.7.6a}$$

$$\left\{e, P^{(e)}\right\} = 1\,. \tag{3.7.6b}$$

正準座標と正準運動量の間のその他のポアソン括弧は 0 になる．

式 (3.7.3) から，第一次拘束条件は次のようになることがわかる:

$$\phi_A := P_A - \frac{i}{2}\bar{Z}_A \approx 0\,, \tag{3.7.7a}$$

$$\bar{\phi}^A := \bar{P}^A + \frac{i}{2}Z^A \approx 0\,, \tag{3.7.7b}$$

$$\phi^{(e)} := P^{(e)} \approx 0\,. \tag{3.7.7c}$$

ここで，$\approx$ は弱い等号を表している．これ以降，$\phi_A, \bar{\phi}^A, \phi^{(e)}$ を一次の拘束量と呼ぶ．ここから Dirac による特異系の正準形式を展開する方法 [54–56] に従って，ラグランジアン (3.7.2) に基づく正準形式を展開していく．そのためにまず式 (3.7.6) を用いて一次の拘束量の間のポアソン括弧を計算すると，

$$\left\{\phi_A, \bar{\phi}^B\right\} = -i\delta^B_A \tag{3.7.8}$$

が得られる．一次の拘束量の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，一次の拘束量と正準ハミルトニアン (3.7.4) の間のポアソン括弧は次のようになる:

$$\{\phi_A, H_{\mathrm{C}}\} = e\bar{Z}_A\,, \tag{3.7.9a}$$

$$\left\{\bar{\phi}^A, H_{\mathrm{C}}\right\} = eZ^A\,, \tag{3.7.9b}$$

$$\left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \bar{Z}_A Z^A - 2k\,. \tag{3.7.9c}$$

いま，正準ハミルトニアン (3.7.4) と一次の拘束量 (3.7.7) から全ハミルトニアンを

$$H_{\mathrm{T}} := H_{\mathrm{C}} + u^A\phi_A + \bar{u}_A\bar{\phi}^A + u_{(e)}\phi^{(e)} \tag{3.7.10}$$

と定義する．ここで，$u^A, \bar{u}_A, u_{(e)}$ はそれぞれの拘束条件に対応するラグランジュ未定係数であり，一般にパラメーター τ に依存する．正準変数の関数 $\mathcal{F}$ に対する時間発展の方程式は，全ハミルトニアン (3.7.10) を用いて，

$$\dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}, H_{\mathrm{T}}\} \tag{3.7.11}$$

と与えられる．式 (3.7.11) とポアソン括弧の結果 (3.7.8) と (3.7.9) を用いると，一次の拘束量に対する時間発展は次のように求まる:

$$\dot{\phi}_A = \{\phi_A, H_{\mathrm{T}}\} \approx e\bar{Z}_A - i\bar{u}_A\,, \tag{3.7.12a}$$

$$\dot{\bar{\phi}}^A = \left\{\bar{\phi}^A, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx eZ^A + iu^A\,, \tag{3.7.12b}$$

$$\dot{\phi}^{(e)} = \left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \bar{Z}_A Z^A - 2k\,. \tag{3.7.12c}$$

さらに式 (3.7.12) は，一次の拘束量が時間発展で変化しないという要請 (整合性の条件) から，次のように書かれる:

$$\dot{\phi}_A = e\bar{Z}_A - i\bar{u}_A \approx 0\,, \tag{3.7.13a}$$

$$\dot{\bar{\phi}}^A = eZ^A + iu^A \approx 0\,, \tag{3.7.13b}$$

$$\dot{\phi}^{(e)} = \bar{Z}_A Z^A - 2k \approx 0\,. \tag{3.7.13c}$$

式 (3.7.13) に対しては次の 2 つの場合が考えられる : (1) ラグランジュ未定係数 u を決める場合，(2) ラグランジュ未定係数 u を含まず新たな拘束条件を決める場合．式 (3.7.13a) と式 (3.7.13b) は (1) の場合になっていて，$\bar{u}_A$ と u^A は

$$\bar{u}_A = -ie\bar{Z}_A\,, \tag{3.7.14a}$$

$$u^A = ieZ^A \tag{3.7.14b}$$

と定まる．式 (3.7.13c) は (2) の場合になっていて，

$$\bar{Z}_A Z^A - 2k = 0 \tag{3.7.15}$$

が成り立つことがわかる．したがって，最後まで定まらないラグランジュ未定係数は $u_{(e)}$ である．このことは，式 (3.7.13c) が第一類拘束条件であることを示唆している．

式 (3.7.15) から，第二次拘束条件は

$$\chi^{(e)} := \bar{Z}_A Z^A - 2k \approx 0 \tag{3.7.16}$$

と与えられる．これ以降，$\chi^{(e)}$ を二次の拘束量と呼ぶ．二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と一次の拘束量の間のポアソン括弧は，次のように得られる:

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi_A\right\} = \bar{Z}_A \,, \tag{3.7.17a}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \bar{\phi}^A\right\} = Z^A \,. \tag{3.7.17b}$$

二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と一次の拘束量の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，二次の拘束量 $\chi^{(e)}$ と正準ハミルトニアン (3.7.4) とのポアソン括弧は

$$\left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0 \tag{3.7.18}$$

となる．いま，$\chi^{(e)}$ の時間発展は，式 (3.7.11)，式 (3.7.17)，式 (3.7.18) を用いると，

$$\dot{\chi}^{(e)} = \left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u^A \bar{Z}_A + \bar{u}_A Z^A \tag{3.7.19}$$

と求まる．式 (3.7.19) から，式 (3.7.14a) と式 (3.7.14b) を用いて，ラグランジュ未定係数 $u^A, \bar{u}_A$ を消去すると，$\dot{\chi}^{(e)}$ は

$$\dot{\chi}^{(e)} \approx 0 \tag{3.7.20}$$

となる．この式は，$\dot{\chi}^{(e)}$ が恒等的に 0 となり式 (3.7.19) から新たな拘束条件が現れないことを意味している．以上のことから，ラグランジアン (3.7.2) から得られる拘束条件をすべて導くことができた．

すべての拘束量間のポアソン括弧を計算して，式 (3.7.8) と式 (3.7.17) が得られた．しかしながら，これらの結果を基に拘束条件を第一類拘束条件か第二類拘束条件かに分類することは難しい．そこで，拘束量間のポアソン括弧がより簡単になるように，次の一次結合を考える [61]:

$$\tilde{\chi}^{(e)} := \chi^{(e)} + i\bar{Z}_A \bar{\phi}^A - i\phi_A Z^A \,. \tag{3.7.21}$$

このとき，新しい拘束条件の全体 $\left(\phi_A, \bar{\phi}^A, \phi^{(e)}, \tilde{\chi}^{(e)}\right) \approx 0$ は元の拘束条件の全体 $\left(\phi_A, \bar{\phi}^A, \phi^{(e)}, \chi^{(e)}\right) \approx 0$ に等しいので，式 (3.7.21) は $\chi^{(e)} \approx 0$ に代わる拘束条件として採用される．新しい拘束量の間のポアソン括弧は，

$$\left\{\phi_A, \bar{\phi}^B\right\} = -i\delta_A^B\,, \tag{3.7.22}$$

を除いてすべて 0 になることを示すことができる．こうして，$\tilde{\chi}^{(e)}$ を用いて拘束量間のポアソン括弧を簡単にすることができたので，拘束量間のポアソン括弧を行列にまとめると次のようになる:

$$\begin{array}{c} \\ \phi_A \\ \bar{\phi}^A \\ \phi^{(e)} \\ \tilde{\chi}^{(e)} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi_B & \bar{\phi}^B & \phi^{(e)} & \tilde{\chi}^{(e)} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & -i\delta_A^B & 0 & 0 \\ i\delta_B^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} . \tag{3.7.23}$$

この行列から，$\phi^{(e)} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(e)} \approx 0$ は第一類拘束条件に分類され，一方，$\phi_A \approx 0$, $\bar{\phi}^A \approx 0$ は第二類拘束条件に分類される．

ここで，ディラックの方法に従って，第二類拘束条件を処理できるように，ディラック括弧を定義する．まず，第二類拘束条件からなる行列 C を行列 (3.7.23) の部分行列として次のように与える:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_A^B \\ i\delta_B^A & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.7.24}$$

この行列 C には逆行列 C^{-1} が存在して，C^{-1} は C に等しいことがわかる．このことより，正準変数の任意関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ に対するディラック括弧は次のように定義される:

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\mathrm{D}} := \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} + i\,\{\mathcal{F}, \phi_A\}\left\{\bar{\phi}^A, \mathcal{G}\right\} - i\left\{\mathcal{F}, \bar{\phi}^A\right\}\{\phi_A, \mathcal{G}\}\,. \tag{3.7.25}$$

第二類拘束条件はすべて，このディラック括弧を用いる限り，強い等号 (=) で 0 におくことができる: $\phi_A = 0$, $\bar{\phi}^A = 0$．この第二類拘束条件から次の式が導かれる:

$$P_A = \frac{i}{2}\bar{Z}_A\,, \qquad\qquad \bar{P}^A = -\frac{i}{2}Z^A\,, \tag{3.7.26a}$$

したがって，P_A, $\bar{P}^A$ は式 (3.7.26) によって定まる従属変数で，残りの $\bar{Z}_A$, Z^A, e, $P^{(e)}$ は独立な正準変数であることがわかる．正準変数 $\bar{Z}_A$, Z^A, e, $P^{(e)}$ の間のディラック括弧は，式 (3.7.25) と式 (3.7.6) を用いると，次のよう求まる:

$$\left\{Z^A, \bar{Z}_B\right\}_{\mathrm{D}} = -i\delta^A_B\,, \tag{3.7.27a}$$

$$\left\{Z^A, Z^B\right\}_{\mathrm{D}} = 0\,, \qquad \left\{\bar{Z}_A, \bar{Z}_B\right\}_{\mathrm{D}} = 0\,, \tag{3.7.27b}$$

$$\left\{e, P^{(e)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1\,. \tag{3.7.27c}$$

正準変数間のその他のディラック括弧は 0 となる．また，第二類拘束条件はすべて強い等号 (=) で 0 になるので，式 (3.7.21) は $\tilde{\chi}^{(e)} = \chi^{(e)}$ に帰着する．したがって，第一類拘束条件は次のようになる:

$$\phi^{(e)} \approx 0\,, \tag{3.7.28a}$$

$$\chi^{(e)} \approx 0\,. \tag{3.7.28b}$$

正準量子化

ここでは，ディラック括弧 (3.7.27) を基に無質量粒子の正準量子化を実行する．

量子力学に移行するために，関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ をそれぞれ対応する演算子 $\hat{\mathcal{F}}$ と $\hat{\mathcal{G}}$ に置き換えて正準交換関係

$$[\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}] = i\widehat{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}} \tag{3.7.29}$$

を設定する．ここで，$\widehat{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}}$ はディラック括弧 $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\mathrm{D}}$ に対応する演算子を表している．式 (3.7.29) と式 (3.7.27) から，次の正準交換関係が定まる:

$$\left[\hat{Z}^A, \hat{\bar{Z}}_B\right] = \delta^A_B\,, \tag{3.7.30a}$$

$$\left[\hat{Z}^A, \hat{Z}^B\right] = 0\,, \qquad \left[\hat{\bar{Z}}_A, \hat{\bar{Z}}_B\right] = 0\,, \tag{3.7.30b}$$

$$\left[\hat{e}, \hat{P}^{(e)}\right] = i\,. \tag{3.7.30c}$$

正準変数間のその他の正準交換関係は 0 である．式 (3.7.30a) と式 (3.7.30b) の正準交換関係は，いわゆるツイスター量子化 [41, 42, 45, 46] に一致している．

量子化の手続きにおいて，第一類拘束条件 (3.7.28) は，第一類の拘束量を対応する演算子に置き換えた後，物理的状態 $|F\rangle$ を定義する条件式として読み替えるこ

とで処理される:

$$\hat{\phi}^{(e)}|F\rangle = \hat{P}^{(e)}|F\rangle = 0\,, \tag{3.7.31a}$$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}^{(e)}|F\rangle &= \left\{\frac{1}{2}\left(\hat{Z}^A\hat{\bar{Z}}_A + \hat{\bar{Z}}_A\hat{Z}^A\right) - 2k\right\}|F\rangle \\ &= \left(\hat{Z}^A\hat{\bar{Z}}_A - 2k - 2\right)|F\rangle = 0\,, \end{aligned}\tag{3.7.31b}$$

ここで，$\hat{\chi}^{(e)}$ に関してはワイル順序 (Weyl order) がとられていて，その後，交換関係 (3.7.30a) を用いて簡潔な形に書き換えられている．演算子 $\hat{\phi}^{(e)}$ と $\hat{\chi}^{(e)}$ は互いに可換である．このため，物理的状態 $|F\rangle$ は演算子 $\hat{\phi}^{(e)}$ と $\hat{\chi}^{(e)}$ の同時固有状態であり，さらなる条件式は発生しないことが言える．

いま，ブラベクター $\langle Z, e|$ を

$$\langle Z, e| := \langle 0|\exp\left(-\hat{Z}^A\hat{\bar{Z}}_A + ie\hat{P}^{(e)}\right) \tag{3.7.32}$$

と定義する．ただし，$\langle 0|$ は

$$\langle 0|\hat{Z}^A = \langle 0|\hat{e} = 0 \tag{3.7.33}$$

を満たすとする．さて，交換関係 (3.7.30) を用いると，次の式が求まる:

$$\langle Z, e|\hat{Z}^A = Z^A\langle Z, e|\,, \tag{3.7.34a}$$

$$\langle Z, e|\hat{e} = e\langle Ze|\,. \tag{3.7.34b}$$

式 (3.7.34a) は

$$\langle Z, e|\hat{\omega}^\alpha = \omega^\alpha\langle Z, e|\,, \tag{3.7.35a}$$

$$\langle Z, e|\hat{\pi}_{\dot{\alpha}} = \pi_{\dot{\alpha}}\langle Z, e| \tag{3.7.35b}$$

と分けて表すこともできる．また，次の式もすぐに求まる:

$$\langle Z, e|\hat{\bar{Z}}_A = -\frac{\partial}{\partial Z^A}\langle Z, e|\,, \tag{3.7.36a}$$

$$\langle Z, e|\hat{P}^{(e)} = -i\frac{\partial}{\partial e}\langle Z, e|\,. \tag{3.7.36b}$$

式 (3.7.36a) もまた

$$\langle Z, e|\hat{\bar{\pi}}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\omega^\alpha}\langle Z, e|\,, \tag{3.7.37a}$$

$$\langle Z, e|\hat{\bar{\omega}}^{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\pi_{\dot{\alpha}}}\langle Z, e| \tag{3.7.37b}$$

と分けて表すことができる．式 (3.7.31a)–(3.7.31b) のそれぞれに左から $\langle Z, e|$ を乗じ，式 (3.7.34)–(3.7.37) を用いると，関数 $F(Z,e) := \langle Z, e|F\rangle$ に対する連立微分方程式が次のように得られる:

$$\frac{\partial}{\partial e}F = 0\,, \tag{3.7.38a}$$

$$\left(-Z^A\frac{\partial}{\partial Z^A} - 2k - 2\right)F = 0\,. \tag{3.7.38b}$$

式 (3.7.38a) は，関数 F が e に依らないことを示している．したがって，関数 F はツイスター変数 Z^A のみに依存した関数になり，$F = F(Z^A)$ と表せる．このような Z^A の正則関数はツイスター関数と呼ばれている．また，式 (3.7.38b) は，ツイスター関数 $F(Z^A)$ が Z^A について次数 $-2k-2$ の斉次関数であることを示している．いま，ツイスター関数 F は量子論における波動関数に相当しており，F に 1 価性を課すことは自然である．実際にこの条件を課すと，次数 $-2k-2$ は整数でなければならないので，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限される．これ以降，次数 $-2k-2$ のツイスター関数を F_k と表す．

ペンローズ変換

ここでは，ツイスター関数 $F_k(Z)$ のペンローズ変換を行い，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場を求める．

まず，$p+q$ 階のスピナー場 $\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}$ を得るために，ツイスター関数 $F_k(Z)$ のペンローズ変換

$$\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_{\Sigma}\pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}F_k(Z)d^2\pi \tag{3.7.39}$$

を考える．ここで，積分測度 $d^2\pi := d\pi_{\dot 0}\wedge d\pi_{\dot 1}$ を定義した．式 (3.7.39) は，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上の $p+q$ 階のスピナー場である．今後 $\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}$ を Ψ と略記する場合もある．式 (3.7.39) は適切な積分路 Σ に沿って周回積分を行うことを表していて，その積分は $\pi_{\dot 0}$, $\pi_{\dot 1}$ に関する 2 重の周回積分である．

さて，適切な積分路 Σ に沿って，式 (3.7.39) における積分を実行する．すると，この積分は，$F_k(Z)$ が Z^A について次数 $-2k-2$ の斉次関数であることから，

$$k = \frac{1}{2}(q-p) \tag{3.7.40}$$

のときだけ 0 にならないことを示すことができる．式 (3.7.40) は，ヘリシティー k とスピナー場 Ψ の階数 $p+q$ の間に成り立つ関係式である．

スピナー場 Ψ は一般化されたワイル方程式を満たしていることを示す．いま，

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}} F_k(Z) = \epsilon^{\beta\alpha}\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\frac{\partial\omega^\gamma}{\partial x^{\alpha\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial\omega^\gamma}F_k(Z) = i\pi^{\dot\beta}\epsilon^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\omega^\gamma}F_k(Z) \tag{3.7.41}$$

と計算できる．式 (3.7.41) と式 (3.7.39) を用いると，Ψ の $x_{\beta\dot\beta}$ に関する微分が次のように求まる:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x)\\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint_\Sigma \pi_{\dot\alpha_1}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}}F_k(Z)d^2\pi\\
&= \frac{i}{(2\pi i)^2}\oint_\Sigma \pi_{\dot\alpha_1}\pi^{\dot\beta}\pi_{\dot\alpha_2}\cdots\pi_{\dot\alpha_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}}\epsilon^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}}\frac{\partial}{\partial\omega^\gamma}F_k(Z)d^2\pi\,.
\end{aligned} \tag{3.7.42}$$

式 (3.7.42) において，添字 $\dot\beta$ と $\dot\alpha_1$ の縮約をとり 2 成分スピナーの性質 $\pi_{\dot\beta}\pi^{\dot\beta}=0$ を用いると，次の式が導かれる:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\beta\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_q}(x) = 0\,. \tag{3.7.43}$$

同様に，式 (3.7.42) において，添字 β と α_1 の縮約をとり

$$\epsilon^{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\omega^\beta}\frac{\partial}{\partial\omega^\gamma}F_k(Z) = 0 \tag{3.7.44}$$

が成り立つことを用いると，次の式が得られる:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}}\Psi_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x) = 0\,. \tag{3.7.45}$$

式 (3.7.43) と式 (3.7.45) は，スピナー場 Ψ が一般化されたワイル方程式を満たしていることを意味している．いま，式 (3.7.43) と式 (3.7.45) および

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}} = \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial x^{\gamma\dot\gamma}}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma\dot\gamma}} \tag{3.7.46}$$

が成り立つことを用いると，クライン・ゴルドン方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta\dot\beta}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot\beta}}\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x) = 0 \tag{3.7.47}$$

が得られる．この式は，スピナー場 Ψ が無質量場であることを示している．したがって，$p+q$ 階の無質量スピナー場 Ψ をペンローズ変換 (3.7.39) として求めることができた．

第4章　剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式

剛性を持つ有質量粒子模型と呼ばれている相対論的な点粒子の模型がある．この模型を記述するラグランジアンは，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンと呼ばれ，点粒子が描く世界線の長さと外曲率を基に構成されている．本章では，第3章と同様の手順で，剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を導き，この形式に基づく剛性を持つ有質量粒子の正準形式を構成し正準量子化を行う．まず，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンと等価な1次形式のラグランジアンを与える．次に，1次形式のラグランジアンを2つのツイスター変数を用いて書き換え，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンを導出する．さらに，ツイスター変数で表現されたラグランジアンに基づく剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を実行し，ツイスター関数を導く．同時に，粒子の質量公式を導出する．その後，得られたツイスター関数のペンローズ変換を行い，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たす4次元時空におけるスピナー場を求める．また，スピン量子数の値が整数値に制限されることを示す．

4.1　導入

剛性を持つ粒子模型は，1986年に，Pisarskiによって提案された [7]．この模型を記述する作用積分は，相対論的点粒子が描く世界線のに世界線の外曲率を付加することで与えられる．実際に，世界線の外曲率を $K = K(l)$ とすると，剛性を持つ粒子模型を定める作用積分は次のように与えられる:

$$\mathcal{S} = \int_{l_0}^{l_1} dl\,[-m - kK(l)]\;. \tag{4.1.1}$$

ここで，l は点粒子が描く世界線の弧長パラメーター，m と k はそれぞれ質量パラメーターと無次元の実定数パラメーターである．剛性を持つ粒子模型は，式 (4.1.1)

において $m=0$ としたとき剛性を持つ無質量粒子模型と呼ばれ，$m\neq 0$ としたとき剛性を持つ有質量粒子模型と呼ばれる．剛性を持つ粒子模型が提案されてから現在まで，この模型に関する研究が多様な観点から行われている [8–24]．

この中で，剛性を持つ粒子模型の古典力学と量子力学が Plyushchay によって考察された [8,9,11,12]．量子化においては，運動量変数と内部座標に依存した波動関数が導かれた．その結果，剛性を持つ無質量粒子模型は，ヘリシティー k を持つ無質量粒子を記述し，そのヘリシティー k は整数値または半整数値に制限されることが示された [12]．加えて，剛性を持つ有質量粒子模型は，整数のスピン量子数を持つ有質量粒子のみを記述することが明らかにされた [8,9]．しかしながら，Plyushchay が行った先行研究では，4 次元時空における場の関数とそれが満たす場の方程式が導かれておらず，それらを導出することが考察すべき課題として残されている．また近年，Deriglazov と Nersessian によって剛性を持つ有質量粒子模型の古典力学と量子力学が再考察され，スピン量子数の値が 1/2 になる可能性が指摘された [14]．このように，有質量粒子模型の場合には相反する 2 つの報告があることから，どちらが正しいのかを明確にする必要がある．

最近，ツイスター変数を用いて表現された剛性を持つ無質量粒子模型が導出された [23]．その結果，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子の作用積分は，ゲージ化された白藤の作用積分 [53] に一致することが証明された．このことは，剛性を持つ無質量粒子模型が，4 次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上のヘリシティー k を持つ無質量粒子を記述することを意味している．また，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子模型に基づく無質量粒子の正準量子化を行うことで，次数 $-2k-2$ のツイスター関数が得られた．このツイスター関数のペンローズ変換を実行することで，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場が求められた．同時に，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限されることがわかった．この結果は，Plyushchay の結論 [12] に一致している．こうして，剛性を持つ無質量粒子模型の場合は，そのツイスター形式を構築することで，4 次元時空におけるスピナー場と粒子のヘリシティー (スピン) の取り得る値が求められたので，同様の議論を剛性を持つ有質量粒子模型に対しても適用できることが期待される．

以上の事柄を背景として，本研究では見通しの良い議論を展開するために，文献 [23] の手法 (第 3 章参照) に従って，剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を構築する．その後，この形式に基づいて剛性を持つ有質量粒子の古典力学と量子力学を考察し，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすスピ

ナー場をツイスター関数のペンローズ変換として求める．また，剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を基に，剛性を持つ有質量粒子が取り得るスピン量子数の値を再考察する．

はじめに，第 3 章で展開された剛性を持つ無質量粒子模型をツイスター変数で記述する方法を剛性を持つ有質量粒子模型に適用するために，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン $L_m(l) := -m - |k|K$ と等価な 1 次形式のラグランジアンを与える．また実際に，1 次形式のラグランジアンはラグランジアン L_m に等しいことを示す．次に，1 次形式のラグランジアンから得られる拘束条件の解を 2 成分スピナー [69] を用いて書き下す．この解を 1 次形式のラグランジアンに代入すると，時空座標とスピナー変数を用いて書かれた剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが得られる．このとき，時空座標とスピナー変数から成るツイスター変数が 2 個定義されるので，得られたラグランジアンを 2 個のツイスター変数を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンを導く．このように，有質量粒子の場合に 2 個のツイスター変数が必要になることは，従来の関連する研究 [65–67,72–79] と整合している．ここで定義された 2 個のツイスター変数はそれぞれ，ナルツイスター条件 [40–42] を満たしていることがわかる．そこで，ナルツイスター条件が取り入れられるように，ラグランジュ未定係数を導入し，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンを修正する．こうすることで，2 個のツイスター変数は，独立な力学変数として扱えるようになる．また，修正された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンは，$U(1) \times U(1)$ 変換のもとで不変である．さらに，修正されたラグランジアンから直接，フェドラック・ルキアスキー型の質量殻条件 [72,73] が得られるように，このラグランジアンを変形する．この変形された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンもまた，$U(1) \times U(1)$ 不変である．

次に，変形された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに基づく正準形式が見通し良く展開できるように，このラグランジアンが持つ $U(1) \times U(1)$ 対称性の一部を壊すようなゲージ固定条件を課す．その後，Dirac による拘束条件を持つ正準形式を展開する方法 [54–56] に従って，ゲージ固定条件が課された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに基づく正準形式を展開する．すると，第一次拘束条件と第二次拘束条件が得られるので，これらを第一類拘束条件と第二類拘束条件に分類する．その際，第二類拘束条件に関しては，ディラック括弧を定義して正準変数を減らすことで処理される．このように正準形式を展開した後，正準量子化は，正準変数を対応する演算子に置き換え，ディラック括弧から定まる交換関

係を設定することで実行される．このとき，第一類拘束条件に関しては，量子化した後で物理的状態を定義する条件式として読み換えられる．この条件式から，2個のツイスター変数それぞれについて次数が同じであるツイスター関数が得られる．また同時に，スピンベクターと粒子の質量の間に成り立つ関係式を量子力学的に考察することで，Plyushchay が導出した質量公式 [9] が得られる．

ここで，4 次元時空における有質量スピナー場を求めるために，得られたツイスター関数のペンローズ変換を行うと，時空座標とスピナー変数によって張られた空間におけるスピナー場が導かれる．このスピナー場をテイラー展開すると，4 次元時空におけるスピナー場が，その展開係数として求められる．求められたスピナー場は，点なしと点付きのスピナー添字のほかに，付加的な上付きの添字と下付きの添字をもっている．また，ペンローズ変換の構造から，上付き (下付き) の添字の数と点なし (点付き) のスピナー添字の数は同じになる．さらに，スピナー添字の個数とスピン量子数との間に成り立つ関係式を数学的に考察し，ツイスター関数が 2 個のツイスター変数について同じ次数の関数であることを用いると，スピン量子数の値は 0 または正の整数値に制限されることが証明される．このことから，粒子のスピン量子数が半整数値をとる可能性は否定され，Plyushchay の結論 [9] を支持する結果が得られる．

いま，4 次元時空におけるスピナー場は，付加的な添字を持つ一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式 [80–82] を満たすことを示すことができる．また，この方程式を基にクライン・ゴルドン方程式を導くことで，このスピナー場によって記述される粒子の質量は上述の質量公式に従うことがわかる．

本章は次のように構成されている: 第 4.2 節では，第 3 章によって展開された方法を剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに適用するために，剛性を持つ有質量粒子の 1 次形式のラグランジアンを与える．第 4.3 節では，1 次形式のラグランジアンを基に，2 個のツイスター変数を定義し，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンを導く．第 4.4 節では，ゲージ固定条件が課された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに基づく正準形式を考察する．第 4.5 節では，前節で得られた正準形式を基に有質量粒子の正準量子化を実行し，ツイスター関数を求める．同時に，粒子の質量公式を導出する．第 4.6 節では，前節で得られたツイスター関数のペンローズ変換を行い，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすスピナー場を求める．また，スピン量子数の値は 0 または正の整数値に制限されることを示す．第 4.7 節では，本章のまとめを行い，今後の課題を述べる．第 4.8 節では，本研究で必要となる計算や公式を証明する．

4.2 剛性を持つ有質量粒子の1次形式のラグランジアン

この節では，第3章で展開された方法を実際に剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに適用するために，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンと等価な1次形式のラグランジアンを与える．

4次元ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上を運動する点粒子の時空座標を $x^\mu = x^\mu(\tau)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ とする．ここで，τ $(\tau_0 \le \tau \le \tau_1)$ は粒子が描く世界線に沿った任意のパラメーターであり，$dx^0/dt > 0$ とする．また，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ である．いま，時空座標 x^μ は1次元パラメーター空間 $\mathcal{T} := \{\tau | \tau_0 \le \tau \le \tau_1\}$ 上の実スカラー場であるので，パラメーター τ の付け替え

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau) \qquad \left(\frac{d\tau'}{d\tau} > 0\right) \tag{4.2.1}$$

のもとでの x^μ の変換は

$$x^\mu(\tau) \to x'^\mu(\tau') = x^\mu(\tau) \tag{4.2.2}$$

と与えられる．

パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実場 $q^\mu = q^\mu(\tau)$, $p^\mu = p^\mu(\tau)$, $r^\mu = r^\mu(\tau)$, $e = e(\tau)$, $c = c(\tau)$ を一般化座標として採用し，次の作用積分を考える:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L\,, \tag{4.2.3}$$

$$L = -m\sqrt{q^2} + (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - (\dot{q}^\mu - cq^\mu)r_\mu + 2e\big(\pm\sqrt{-q^2 r^2} - k\big)\,. \tag{4.2.4}$$

ただし，q^μ, r^μ は条件式 $q^2 := q_\mu q^\mu > 0$, $r^2 := r_\mu r^\mu < 0$ を満たすとする．また，m は質量パラメーターであり，k は無次元の定数パラメーターである．変数の上のドット記号は τ に関する微分を表している．さて，パラメーターの付け替えのもとでの場 $q_\mu, p_\mu, r_\mu, e, c$ の変換がそれぞれ，次のように与えられるとする:

$$q_\mu(\tau) \to q'_\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} q^\mu(\tau)\,, \tag{4.2.5a}$$

$$p_\mu(\tau) \to p'_\mu(\tau') = p_\mu(\tau)\,, \tag{4.2.5b}$$

$$r_\mu(\tau) \to r'_\mu(\tau') = \frac{d\tau'}{d\tau} r_\mu(\tau)\,, \tag{4.2.5c}$$

$$e(\tau) \to e'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} e(\tau)\,, \tag{4.2.5d}$$

$$c(\tau) \to c'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} c(\tau) + \frac{d\tau'}{d\tau}\frac{d^2\tau}{d\tau'^2}\,. \tag{4.2.5e}$$

式 (4.2.5) と式 (4.2.2) を用いると，作用積分 S はパラメーターの付け替えのもとで不変であることがわかる．ここで，ラグランジアン (4.2.4) は $\dot{x}^\mu$ と $\dot{q}^\mu$ について 1 次式になっていることを指摘しておく．また，ラグランジアン (4.2.4) には p_μ, r_μ, e, c の運動項が含まれていないので，p_μ, r_μ, e, c は独立な補助場の役割を果たしている．

ラグランジアン (4.2.4) の $x^\mu, q^\mu, p_\mu, r_\mu, e, c$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ次のようになる:

$$\dot{p}_\mu = 0\,, \tag{4.2.6a}$$

$$\dot{r}_\mu + p_\mu + cr_\mu - \left(\frac{m}{\sqrt{q^2}} \pm \frac{2er^2}{\sqrt{-q^2r^2}}\right) q_\mu = 0\,, \tag{4.2.6b}$$

$$\dot{x}^\mu - q^\mu = 0\,, \tag{4.2.6c}$$

$$\dot{q}^\mu - cq^\mu \pm \frac{2eq^2}{\sqrt{-q^2r^2}} r^\mu = 0\,, \tag{4.2.6d}$$

$$\pm\sqrt{-q^2r^2} - k = 0\,, \tag{4.2.6e}$$

$$q^\mu r_\mu = 0\,. \tag{4.2.6f}$$

式 (4.2.6a)–(4.2.6d) にはパラメーター τ の微分項が含まれていて，一方，式 (4.2.6e) と式 (4.2.6f) には含まれていないことがわかる．したがって，式 (4.2.6e) と式 (4.2.6f) は拘束条件であることが言える．また，式 (4.2.6e) は，k の正負が $\pm\sqrt{q^2r^2}$ の符号の選択に依存して決まることを示している．式 (4.2.6e) の両辺を τ で微分し，式 (4.2.6b)，式 (4.2.6d)，式 (4.2.6f) を用いると，

$$q^2 r^\mu p_\mu = 0 \tag{4.2.7}$$

が得られる．ここで，q^2 は条件式 $q^2 > 0$ を満たしているので，式 (4.2.7) は

$$r^\mu p_\mu = 0 \tag{4.2.8}$$

となる．同様に，式 (4.2.6f) の両辺を τ で微分し，式 (4.2.6b) と式 (4.2.6d) を用いると，

$$q^\mu p_\mu = m\sqrt{q^2} \tag{4.2.9}$$

が導出される．次に，式 (4.2.9) の両辺を τ 微分で微分し，式 (4.2.6a) を用いると，

$$\left(p_\mu - m\frac{q_\mu}{\sqrt{q^2}}\right) \dot{q}^\mu = 0 \tag{4.2.10}$$

が求まる．式 (4.2.10) の左辺に式 (4.2.6d)，式 (4.2.8)，式 (4.2.9) を用いると，式 (4.2.10) は恒等的に 0 であることが確かめられる．このことは，式 (4.2.9) から新たな拘束条件が現れないことを意味している．さて，式 (4.2.8) の両辺を τ で微分し，式 (4.2.6a)，式 (4.2.6b)，式 (4.2.8)，式 (4.2.9) を用いると，

$$p^2\,(:= p_\mu p^\mu) = m^2 \mp 2me\sqrt{-r^2} \tag{4.2.11}$$

が導かれる．式 (4.2.11) の両辺を τ で微分して，式 (4.2.6a)，式 (4.2.6b)，式 (4.2.6f)，式 (4.2.8) を用いると，

$$(\dot{e} - ce)\sqrt{-r^2} = 0 \tag{4.2.12}$$

が求まる．式 (4.2.12) は，r^2 が条件式 $r^2 < 0$ を満たしていることから，$\dot{e} - ce = 0$ となり，c は $c = \dot{e}/e = \frac{d}{d\tau}\ln e$ に定まる．このことは式 (4.2.12) が代数的な方程式ではないことを意味している．したがって，式 (4.2.12) は拘束条件ではないことがわかる．以上のことから，ラグランジアン (4.2.4) から得られるすべての拘束条件は，式 (4.2.6e) と式 (4.2.6f) に加えて，式 (4.2.8)，式 (4.2.9)，式 (4.2.11) であることが結論される．

式 (4.2.6d) を用いて式 (4.2.4) から補助場 r_μ を消去すると，

$$L = -m\sqrt{q^2} + (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu - 2ke \tag{4.2.13}$$

が得られる．このとき補助場 e はもはや，独立変数ではなく式 (4.2.6d) から定まる従属変数になる．実際に，e は次の手順によって定まる．まず，式 (4.2.6d) の両辺に q_μ を乗じて内積をとり，式 (4.2.6f) を用いると，

$$c = \frac{q\dot{q}}{q^2} \tag{4.2.14}$$

が求まる．ここで，$q\dot{q} := q_\mu \dot{q}^\mu$ である．その後，式 (4.2.14) と式 (4.2.6d) を用いると，次の式が導かれる:

$$\begin{aligned} e^2 &= -\frac{1}{4q^2}\left(\dot{q}_\mu - cq_\mu\right)\left(\dot{q}^\mu - cq^\mu\right) \\ &= -\frac{\dot{q}_\perp^2}{4q^2}\,. \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

ここで，$\dot{q}_\perp^2 := \dot{q}_{\perp\mu}\dot{q}_\perp^\mu$ であり，

$$\dot{q}_\perp^\mu := \dot{q}^\mu - q^\mu \frac{q\dot{q}}{q^2} \tag{4.2.16}$$

を定義した．このようにして，補助場 e は

$$e = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\dot{q}_\perp^2}{q^2}} \tag{4.2.17}$$

と定まる．いま，不等式 $\dot{q}_\perp^2 = \left(q^2\dot{q}^2 - (q\dot{q})^2\right)/q^2 \leq 0$ が成り立つことが，q^μ が $q^2 > 0$ を満たしていることから，証明される (第 3.7.1 項参照)．このことは式 (4.2.17) 右辺が実数であることを意味している．したがって，式 (4.2.17) は補助場 e が実数であることと両立している．式 (4.2.17) をラグランジアン (4.2.13) に代入すると，

$$L = -m\sqrt{q^2} + (q^\mu - \dot{x}^\mu)p_\mu \mp k\sqrt{-\frac{\dot{q}_\perp^2}{q^2}} \tag{4.2.18}$$

が導出される．式 (4.2.18) から式 (4.2.6c) を用いて q^μ と p_μ を消去すると，式 (4.2.18) は次のようになる:

$$\begin{aligned} L &= -m\sqrt{\dot{x}^2} \mp k\sqrt{-\frac{\ddot{x}_\perp^2}{\dot{x}^2}} \\ &= -m\sqrt{\dot{x}^2} \mp k\frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{x})^2 - \dot{x}^2\ddot{x}^2}}{\dot{x}^2}\,. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

ここで，$\dot{x}\ddot{x} := \dot{x}_\mu\ddot{x}^\mu$ であり，

$$\ddot{x}_\perp^\mu := \ddot{x}^\mu - \dot{x}^\mu\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \tag{4.2.20}$$

である．式 (4.2.19) と式 (4.2.18) における符号 $\pm$ は，k の正負と組み合わせて $m \downarrow 0$ の極限で結果的にラグランジアンが負になるように選ばれる．すなわち，$\mp k = -|k|$ になる．すると，ラグランジアン (4.2.19) は

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^2} - |k|\sqrt{-\frac{\ddot{x}_\perp^2}{\dot{x}^2}} \tag{4.2.21}$$

となる．式 (4.2.21) は τ の関数として表したときの剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン $L(\tau) = \sqrt{\dot{x}^2}L_m = \sqrt{\dot{x}^2}(-m - |k|K)$ にほかならない [7,9,14]．(このとき，$\mp k = -|k|$ は式 (4.2.6e) と両立していて，矛盾のない結果 $\sqrt{-q^2r^2} = |k|$ を与える．) さて，式 (4.2.21) における $\dot{x}^\mu$ は条件式 $\dot{x}^2 > 0$ を満たしている．この条件式は，粒子が光速よりも遅い速さで運動することを意味している．ラグランジアン (4.2.21) は，パラメーターの付け替えのもとで不変な作用積分 (4.2.4) を基に導かれている．このことから期待されるように，ラグランジアン (4.2.21) から定まる作用積分 $S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L$ もまたパラメーターの付け替えのもとで不変である．ここ

では，1 次形式のラグランジアン (4.2.4) から補助場 p_μ, r_μ, e, c を消去し，さらに q^μ を消去することで，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.2.19) が導かれた．このことは，1 次形式のラグランジアン (4.2.4) が剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンと古典的に等価であることを示している．したがって，$\dot{x}^\mu$ と q^μ について 1 次式の剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.2.4) を構成することができた．

4.3 剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式

この節では，前節で得られた 1 次形式のラグランジアンを基に，第 3 章で展開された方法に従って，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンを導く．

まず，1 次形式のラグランジアン (4.2.4) は，2 階のスピナーを用いると次のように書ける[1]:

$$L = -m\sqrt{q^2} + (q^{\alpha\dot{\alpha}} - \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}})p_{\alpha\dot{\alpha}} - (\dot{q}^{\alpha\dot{\alpha}} - cq^{\alpha\dot{\alpha}})r_{\alpha\dot{\alpha}} + 2e\Big(\sqrt{-q^2r^2} - |k|\Big)\,. \quad (4.3.1)$$

ここで，$q^2 := q_{\alpha\dot{\alpha}}q^{\alpha\dot{\alpha}}$, $r^2 := r_{\alpha\dot{\alpha}}r^{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha = 0, 1; \dot{\alpha} = \dot{0}, \dot{1})$ である．式 (4.3.1) では，e を $\pm e$ と置き換え，$\pm k = |k|$ としてある．また，拘束条件 (4.2.8) と (4.2.6f) はそれぞれ，2 階のスピナーを用いて，

$$p^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}} = 0\,, \quad (4.3.2a)$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}}r_{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \quad (4.3.2b)$$

と表せる．拘束条件 (4.3.2a) と (4.3.2b) の解は，2 成分スピナー $\pi_{i\dot{\alpha}} = \pi_{i\dot{\alpha}}(\tau)$ $(i = 1, 2)$ とその複素共役 $\bar{\pi}^i_\alpha$ $(:= \overline{\pi_{i\dot{\alpha}}}) = \bar{\pi}^i_\alpha(\tau)$ を用いて，次のように書き下せる:

$$p_{\alpha\dot{\alpha}} = \bar{\pi}^1_\alpha\pi_{1\dot{\alpha}} + \bar{\pi}^2_\alpha\pi_{2\dot{\alpha}} \equiv \bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}\,, \quad (4.3.3a)$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}} = f\left(\bar{\pi}^1_\alpha\pi_{1\dot{\alpha}} + \gamma\bar{\pi}^2_\alpha\pi_{2\dot{\alpha}}\right)\,, \quad (4.3.3b)$$

$$r_{\alpha\dot{\alpha}} = i\left(g\bar{\pi}^1_\alpha\pi_{2\dot{\alpha}} - \bar{g}\bar{\pi}^2_\alpha\pi_{1\dot{\alpha}}\right)\,. \quad (4.3.3c)$$

[1] 2 階のスピナー $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ $(p_{\alpha\dot{\alpha}})$ と 4 元ベクター x^μ (p_μ) の間には次の関係式が成り立つ [69]:

$$\begin{pmatrix} x^{0\dot{0}} & x^{0\dot{1}} \\ x^{1\dot{0}} & x^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{0\dot{0}} & p_{0\dot{1}} \\ p_{1\dot{0}} & p_{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}.$$

また，$x^{\alpha\dot{\beta}}$ と $p_{\alpha\dot{\beta}}$ は，x^μ と p_μ が実数である場合に限り，エルミートである．

ここで，$f=f(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の正の実場，$g=g(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素場，γ は正の定数である．解 (4.3.3a)–(4.3.3c) は，残りの拘束条件 (4.2.6e)，(4.2.9)，(4.2.11) と整合している．また，式 (4.3.3a)–(4.3.3c) が実際に拘束条件 (4.3.2a) と (4.3.2b) の解であることは，任意の点なしのスピナー変数 ι_α と κ_α が $\iota^\alpha\kappa_\alpha=\epsilon^{\alpha\beta}\iota_\beta\kappa_\alpha=\iota^\alpha\kappa^\beta\epsilon_{\beta\alpha}$ を満たすこととその複素共役 $\bar{\iota}_{\dot{\alpha}}$ と $\bar{\kappa}_{\dot{\alpha}}$ も同様の式を満たすことを用いれば，示すことができる．ここで，レビ・チビタの記号 $\epsilon^{\alpha\beta}$ と $\epsilon_{\alpha\beta}$ は $\epsilon^{01}=\epsilon_{01}=1$ である．いま，$\pi_{i\dot{\alpha}}$ と $\bar{\pi}^i_\alpha$ をパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素スカラー場とすると，パラメーターの付け替えのもとでの $\pi_{i\dot{\alpha}}$ と $\bar{\pi}^i_\alpha$ の変換は

$$\pi_{i\dot{\alpha}}(\tau)\to\pi'_{i\dot{\alpha}}(\tau')=\pi_{i\dot{\alpha}}(\tau)\,,\quad \bar{\pi}^i_\alpha(\tau)\to\bar{\pi}'^i_\alpha(\tau')=\bar{\pi}^i_\alpha(\tau) \tag{4.3.4}$$

と与えられる．また，パラメーターの付け替えのもとでの f と g の変換が

$$f(\tau)\to f'(\tau')=\frac{d\tau}{d\tau'}f(\tau)\,, \tag{4.3.5a}$$

$$g(\tau)\to g'(\tau')=\frac{d\tau'}{d\tau}g(\tau) \tag{4.3.5b}$$

と与えられるとする．すると，パラメーターの付け替えのもとでの式 (4.3.3a)，式 (4.3.3b)，式 (4.3.3c) の変換はそれぞれ，変換則 (4.2.5b)，(4.2.5a)，(4.2.5c) と両立することがわかる．また，パラメーターの付け替えのもとでの式 (4.3.3) の共変性が保たれるためには，f と g のようなスカラー密度場を導入する必要があることもわかる．さらに，式 (4.3.3) における $p_{\alpha\dot{\alpha}}$, $q^{\alpha\dot{\alpha}}$, $r_{\alpha\dot{\alpha}}$ は，次の局所 $U(1)\times U(1)$ 変換のもとで不変であることを示すことができる:

$$\pi_{i\dot{\alpha}}\to\pi'_{i\dot{\alpha}}=e^{i\theta_i}\pi_{i\dot{\alpha}}\,,\quad \bar{\pi}^i_\alpha\to\bar{\pi}'^i_\alpha=e^{-i\theta_i}\bar{\pi}^i_\alpha\,, \tag{4.3.6a}$$

$$e\to e'=e\,,\qquad\qquad f\to f'=f\,, \tag{4.3.6b}$$

$$g\to g'=e^{i(\theta_1-\theta_2)}g\,,\quad \bar{g}\to\bar{g}'=e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\bar{g} \tag{4.3.6c}$$

ここで，$\theta_i=\theta_i(\tau)\,(i=1,2)$ は実ゲージ関数である．これ以降，θ_i に関する局所 $U(1)$ 変換を $U(1)_i$ 変換と呼び，それに対応するゲージ群を $U(1)_i$ と表す．

式 (4.3.3a)–(4.3.3c) を用いると，次の式が得られる:

$$p^2=2|\mathit{\Pi}|^2\,, \tag{4.3.7a}$$

$$q^2=2\gamma f^2|\mathit{\Pi}|^2\,, \tag{4.3.7b}$$

$$r^2=-2\tilde{g}^2|\mathit{\Pi}|^2\,, \tag{4.3.7c}$$

$$q^{\alpha\dot{\alpha}}p_{\alpha\dot{\alpha}}=(\gamma+1)f|\mathit{\Pi}|^2\,. \tag{4.3.7d}$$

ここで，$\tilde{g} := |g|$ であり，$\mathit{\Pi}$ は

$$\mathit{\Pi} := \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_j^{\dot{\alpha}} = \pi_{1\dot{\alpha}}\pi_2^{\dot{\alpha}} \tag{4.3.8}$$

と定義される複素スカラー場である．また，レビ・チビタの記号 ϵ^{ij} と ϵ_{ij} を $\epsilon^{01} = \epsilon_{01} = 1$ と定義し，その複素共役を $\overline{\epsilon^{ij}} = \epsilon_{ij}$, $\overline{\epsilon_{ij}} = \epsilon^{ij}$ と定義した．式 (4.3.8) と式 (4.3.6a) を用いると，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでの $\mathit{\Pi}$ の変換は

$$\mathit{\Pi} \to \mathit{\Pi}' = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\mathit{\Pi} \tag{4.3.9}$$

と求まる．いま，式 (4.3.7b)，式 (4.3.7c) が条件式 $q^2 > 0$，$r^2 < 0$ と両立するためには，$\pi_{1\dot{\alpha}}$ と $\pi_{2\dot{\alpha}}$ は互いに一次独立である必要がある： $\pi_{1\dot{\alpha}} \neq l\pi_{2\dot{\alpha}}$ $(l \in \mathbb{C})$．また，式 (4.3.7b) と式 (4.3.7c) は，$\sqrt{-q^2r^2} = |k|$ と整合的であることは明らかである．さらに，式 (4.3.7b) と式 (4.3.7c) は，式 (4.2.9) とも整合している．そして，式 (4.3.7a) と式 (4.3.7c) は，式 (4.2.11) によって場 e が定まるとすれば，式 (4.2.11) と両立してる．

式 (4.3.1) に式 (4.3.3)，式 (4.3.7b)，式 (4.3.7c) を代入すると，次の式が得られる:

$$\begin{aligned} L = &- \dot{x}^{\alpha\dot{\alpha}}\left(\bar{\pi}^1_\alpha\pi_{1\dot{\alpha}} + \bar{\pi}^2_\alpha\pi_{2\dot{\alpha}}\right) \\ &- if\left(g\mathit{\Pi}\dot{\bar{\pi}}^1_\alpha\bar{\pi}^{1\alpha} - \bar{g}\bar{\mathit{\Pi}}\dot{\pi}_{1\dot{\alpha}}\pi_1^{\dot{\alpha}} + \gamma\bar{g}\mathit{\Pi}\dot{\bar{\pi}}^2_\alpha\bar{\pi}^{2\alpha} - \gamma g\bar{\mathit{\Pi}}\dot{\pi}_{2\dot{\alpha}}\pi_2^{\dot{\alpha}}\right) \\ &+ \tilde{f}\left(\sqrt{2}|\mathit{\Pi}| - M\right) + 2e\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}\tilde{f}\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

ここで，$\tilde{f}$ と M をそれぞれ

$$\tilde{f} := \frac{(\gamma+1)|\mathit{\Pi}|}{\sqrt{2}}f\ (>0)\,, \tag{4.3.11}$$

$$M := \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma+1}m \tag{4.3.12}$$

と定義した．式 (4.3.10) における独立な座標変数は，$\left(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \pi_{i\dot{\alpha}}, \bar{\pi}^i_\alpha, e, \tilde{f}, g, \bar{g}\right)$ である．ラグランジアン (4.3.10) は，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとで不変である．いま，新しい 2 成分スピナー $\omega_i^\alpha = \omega_i^\alpha(\tau)$ を

$$\omega_1^\alpha := ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{1\dot{\alpha}} + fg\mathit{\Pi}\bar{\pi}^{1\alpha}\,, \tag{4.3.13a}$$

$$\omega_2^\alpha := ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{2\dot{\alpha}} + \gamma f\bar{g}\mathit{\Pi}\bar{\pi}^{2\alpha} \tag{4.3.13b}$$

と定義する．これらの複素共役 $\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}} = \bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}(\tau)$ は，

$$\bar{\omega}^{1\dot{\alpha}} := -ix^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^1_\alpha + f\bar{g}\bar{\mathit{\Pi}}\pi^{\dot{\alpha}}_1\,, \tag{4.3.14a}$$

$$\bar{\omega}^{2\dot{\alpha}} := -ix^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^2_\alpha + \gamma fg\bar{\mathit{\Pi}}\pi^{\dot{\alpha}}_2 \tag{4.3.14b}$$

である[2]．このとき $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ は，時空座標 x^μ が実数であることから，エルミート性 $\overline{x^{\alpha\dot{\beta}}} = x^{\beta\dot{\alpha}}$ を満たしていることに注意する．2 成分スピナー ω^α_i と $\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}$ は，明らかに，パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素スカラー場としての役割を果たしている．また，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでの ω^α_i と $\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}$ の変換は，

$$\omega^\alpha_i \to \omega'^\alpha_i = e^{i\theta_i}\omega^\alpha_i\,, \quad \bar{\omega}^{i\dot{\alpha}} \to \bar{\omega}'^{i\dot{\alpha}} = e^{-i\theta_i}\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}} \tag{4.3.15}$$

と求まる．いま，式 (4.3.13) と式 (4.3.14) を用いると，

$$\bar{\pi}^1_\alpha\omega^\alpha_1 + \bar{\omega}^{1\dot{\alpha}}\pi_{1\dot{\alpha}} = 0\,, \quad \bar{\pi}^2_\alpha\omega^\alpha_2 + \bar{\omega}^{2\dot{\alpha}}\pi_{2\dot{\alpha}} = 0 \tag{4.3.16}$$

が得られる．式 (4.3.16) の第 1 式と第 2 式はそれぞれ，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとで不変である．

ラグランジアン (4.3.10) を式 (4.3.13) と式 (4.3.14) を用いて書き換えると，L は

$$\begin{aligned} L = {}& \frac{i}{2}\left(\bar{\pi}^i_\alpha\dot{\omega}^\alpha_i + \bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}\dot{\pi}_{i\dot{\alpha}} - \omega^\alpha_i\dot{\bar{\pi}}^i_\alpha - \pi_{i\dot{\alpha}}\dot{\bar{\omega}}^{i\dot{\alpha}}\right) \\ & + \tilde{f}\left(\sqrt{2}|\mathit{\Pi}| - M\right) + 2e\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}\tilde{f}\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right) \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

となる．ラグランジアン (4.3.17) は，(通常のツイスター変数と少し異なる) ツイスター変数 Z^A_i $(A = 0, 1, 2, 3)$ とそれと対になる双対ツイスター変数 $\bar{Z}^A_i$ を

$$Z^A_i := (\omega^\alpha_i, \pi_{i\dot{\alpha}})\,, \quad \bar{Z}^i_A := (\bar{\pi}^i_\alpha, \bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}) \tag{4.3.18}$$

と定義すれば，

$$\begin{aligned} L = {}& \frac{i}{2}\left(\bar{Z}^i_A\dot{Z}^A_i - Z^A_i\dot{\bar{Z}}^i_A\right) \\ & + \tilde{f}\left(\sqrt{2}|\mathit{\Pi}| - M\right) + 2e\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}\tilde{f}\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right) \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

[2] 文献 [83] では，式 (4.3.14) に類似しているが，本質的に異なる式 $\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}} = -ix^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha + \rho^{-1}\epsilon^{ij}\pi^{\dot{\alpha}}_j$ が与えられている (ここで，ρ は AdS_5 空間の動径座標を表している)．この式は $U(1) \times SU(2)$ 変換のもとで共変的であるのに対し，式 (4.3.13) と式 (4.3.14) はそれぞれ $U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでだけ共変的である．

と書き換えられる．また，式 (4.3.16) は，式 (4.3.18) を用いると，

$$\bar{Z}^1_A Z^A_1 = 0\,, \quad \bar{Z}^2_A Z^A_2 = 0 \tag{4.3.20}$$

と表せる．この式はナルツイスター条件を表しているので，Z^A_i はナルツイスターであることがわかる [40–42]．式 (4.3.18) のツイスター変数に対する $U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでの変換は，変換則 (4.3.6a) と (4.3.15) を組み合わせると，

$$Z^A_i \to Z'^A_i = e^{i\theta_i} Z^A_i\,, \quad \bar{Z}^i_A \to \bar{Z}'^i_A = e^{-i\theta_i} \bar{Z}^i_A \tag{4.3.21}$$

と求まる．

ここで，2 成分スピナー ω^α_i, $\bar{\omega}^{i\dot{\alpha}}$ は，式 (4.3.13)，式 (4.3.14) と無関係に与えられる独立な力学変数であるとする．すると，ラグランジアン (4.3.19) が本来もっていた $U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性は，式 (4.3.19) に τ に関する微分項が含まれていることより，満たされなくなる．この $U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性は，ナルツイスター条件 (4.3.20) を用いる場合に限り満たされることがわかる．そこで，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性が満たされるように，パラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実場 $a_i = a_i(\tau)$ をラグランジュ未定係数として導入し，ラグランジアン (4.3.19) を修正する．実際に，a_i を用いてラグランジアン (4.3.19) にナルツイスター条件 (4.3.20) を付加すると，ラグランジアン (4.3.19) は次のように修正される:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{i}{2}\left(\bar{Z}^i_A \dot{Z}^A_i - Z^A_i \dot{\bar{Z}}^i_A\right) + \sum_{i=1,2} a_i \bar{Z}^i_A Z^A_i \\ & + \tilde{f}\left(\sqrt{2}|\mathit{\Pi}| - M\right) + 2e\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}\tilde{f}\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right). \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

このときナルツイスター条件は，このラグランジアンの a_1 と a_2 に関するオイラー・ラグランジュ方程式として導かれるようになる．さて，パラメーターの付け替えのもとでの場 a_i の変換が

$$a_i(\tau) \to a'_i(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} a_i(\tau) \tag{4.3.23}$$

と与えられるとする．すると，ラグランジアン (4.3.22) から定まる作用積分 S はパラメーターの付け替えのもとで不変になる．また同時に，$U(1)_i$ 変換のもとでの場 a_i の変換を

$$a_i \to a'_i = a_i + \dot{\theta}_i \tag{4.3.24}$$

とすると，ラグランジアン (4.3.10) が本来もっていた $U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性も，ラグランジアン (4.3.22) において満たされるようになる．いま，

$$D_i Z_i^A := \dot{Z}_i^A - i a_i Z_i^A\,, \quad \bar{D}_i \bar{Z}_A^i := \dot{\bar{Z}}_A^i + i a_i \bar{Z}_A^i \tag{4.3.25}$$

を定義し (添字 i については和をとらない)，ラグランジアン (4.3.22) を

$$\begin{aligned} L =& \frac{i}{2} \sum_{i=1,2} \left(\bar{Z}_A^i D_i Z_i^A - Z_i^A \bar{D}_i \bar{Z}_A^i \right) \\ &+ \tilde{f} \left(\sqrt{2} |\mathit{\Pi}| - M \right) + 2e \left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} \tilde{f} \tilde{g} |\mathit{\Pi}| - |k| \right) \end{aligned} \tag{4.3.26}$$

と書き換える．ここで，$U(1)_i$ 変換のもとでの $D_i Z_i^A$ の変換は，式 (4.3.21) と式 (4.3.24) を用いると，Z_i^A の変換と同じようになることを示すことができる．このことは，a_i がパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の $U(1)$ ゲージ場としての役割を果たし，D_i がそれに対応する共変微分であることを意味している．式 (4.3.26) における独立な座標変数は $(Z_i^A, \bar{Z}_A^i, a_i, e, \tilde{f}, \tilde{g})$ である．

ラグランジアン (4.3.26) の $e, \tilde{f}, \tilde{g}$ に関するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ，次のようになる:

$$\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} \tilde{f} \tilde{g} |\mathit{\Pi}| - |k| = 0\,, \tag{4.3.27a}$$

$$\sqrt{2} |\mathit{\Pi}| - M + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} e \tilde{g} |\mathit{\Pi}| = 0\,, \tag{4.3.27b}$$

$$\frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} e \tilde{f} |\mathit{\Pi}| = 0\,. \tag{4.3.27c}$$

式 (4.3.27c) は，$\gamma > 0$ と $\tilde{f} > 0$, $|\mathit{\Pi}| > 0$ から，

$$e = 0 \tag{4.3.28}$$

となる．この式を用いると，式 (4.3.27b) は

$$\sqrt{2} |\mathit{\Pi}| = M \tag{4.3.29}$$

に帰着する．式 (4.3.29) は

$$\sqrt{2} e^{-i\varphi} \mathit{\Pi} = M\,, \quad \sqrt{2} e^{i\varphi} \bar{\mathit{\Pi}} = M \tag{4.3.30}$$

と等価である[3]．ここで，$\varphi = \varphi(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実スカラー場である．また，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでの φ の変換が，

$$\varphi \to \varphi' = \varphi + \theta_1 + \theta_2 \tag{4.3.31}$$

と与えられるとする．すると，式 (4.3.30) はパラメーターの付け替えのもとで不変になり，同時に，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでも不変になる．いま，式 (4.3.29) を介することなく，直接式 (4.3.30) が得られるように，ラグランジアン (4.3.26) を次のように変形する:

$$\begin{aligned} L = & \frac{i}{2} \sum_{i=1,2} \left(\bar{Z}^i_A D_i Z^A_i - Z^A_i \bar{D}_i \bar{Z}^i_A \right) + h \left(\sqrt{2} e^{-i\varphi} \Pi - M \right) + \bar{h} \left(\sqrt{2} e^{i\varphi} \bar{\Pi} - M \right) \\ & + 2e \left\{ \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} (h + \bar{h}) \tilde{g} |\Pi| - |k| \right\} . \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

ここで，$h = h(\tau)$ は，

$$h + \bar{h} = \tilde{f} \ (> 0) \tag{4.3.33}$$

を満たす，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとで不変なパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の複素場である．また，パラメーターの付け替えのもとでの h の変換は

$$h(\tau) \to h'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} h(\tau) \tag{4.3.34}$$

と与えられる．ラグランジアン (4.3.32) から定まる作用積分 S は，明らかに，パラメーターの付け替えのもとで不変である．また同時に，ラグランジアン (4.3.32) は，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとでも不変である．式 (4.3.32) における独立な座標変数は，$(Z^A_i, \bar{Z}^i_A, a_i, e, \tilde{g}, h, \bar{h}, \varphi)$ である．ラグランジアン (4.3.32) の $e, h, \bar{h}, \varphi, \tilde{g}$ に関

[3] 式 (4.3.30) は，$\sqrt{2}\Pi = Me^{i\varphi}$, $\sqrt{2}\bar{\Pi} = Me^{-i\varphi}$ のように，フェドラック・ルキアスキー型の質量殻条件 [72, 73] に書き換えられる．

するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ，次のようになる:

$$\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}(h+\bar{h})\tilde{g}|\mathit{\Pi}|-|k|=0\,, \tag{4.3.35a}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\varphi}\mathit{\Pi}-M+\frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\mathit{\Pi}|=0\,, \tag{4.3.35b}$$

$$\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}}-M+\frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\mathit{\Pi}|=0\,, \tag{4.3.35c}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\varphi}\mathit{\Pi}h-\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}}\bar{h}=0\,, \tag{4.3.35d}$$

$$\frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})|\mathit{\Pi}|=0\,. \tag{4.3.35e}$$

式 (4.3.35a) と式 (4.3.35e) はそれぞれ，式 (4.3.27a) と式 (4.3.27c) に等価である．式 (4.3.35e) は

$$e=0 \tag{4.3.36}$$

となるので，式 (4.3.35b) と式 (4.3.35c) は，式 (4.3.30) に帰着する．これらの結果から，式 (4.3.35d) は

$$h=\bar{h} \tag{4.3.37}$$

となるので，h は

$$h=\frac{\tilde{f}}{2} \tag{4.3.38}$$

と求まることがわかる．したがって，ラグランジアン (4.3.32) はラグランジアン (4.3.26) と等価であることが証明された．こうして，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが導出され，剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式が構築された．

いま，今後見通し良く議論をすることができるようにゲージ固定条件

$$a_1+a_2=0 \tag{4.3.39}$$

を課す．このゲージ固定条件は，ラグランジアン (4.3.32) が持つ $U(1)_1\times U(1)_2$ 不変性の一部を壊すが，すべてを壊すわけではない．実際に，$\theta_1+\theta_2=0$ を満たすゲージ関数 θ_i をパラメーターとするゲージ変換のもとでの不変性は保たれている．

(ゲージ固定条件 (4.3.39) は，パラメーターの付け替えに対して共変的であるようなローレンツ型のゲージ条件 $\dot{a}_1 + \dot{a}_2 = 0$ と等価である.）さらに，付加条件

$$\varphi = 0 \tag{4.3.40}$$

を課す．この付加条件は，変換則 (4.3.31) からわかるように，ゲージ固定条件 (4.3.39) と整合している．また，付加条件 (4.3.40) は，ゲージ固定条件と同様の役割を果たしていることがわかる．実際に，もし付加条件 (4.3.40) だけをはじめに課したならば，式 (4.3.39) は，正準形式を展開する中で第二次拘束条件として得られることを示すことができる．しかしながら，条件 (4.3.39) と (4.3.40) の両方を課すことで，結果的に，簡潔に正準形式を解析できることがわかる．このことを考慮し，本研究では条件 (4.3.39) と (4.3.40) の両方を課して，議論を進めていく．さて，ラグランジアン (4.3.32) に条件 (4.3.39) と (4.3.40) を取り入れるために，ゲージ固定項 $b(a_1 + a_2)$ とそれと同型の項 $M\zeta\varphi$ をラグランジアン (4.3.32) に付加する:

$$\begin{aligned} L = \frac{i}{2}\sum_{i=1,2}\left(\bar{Z}^i_A D_i Z^A_i - Z^A_i \bar{D}_i \bar{Z}^i_A\right) + h\left(\sqrt{2}e^{-i\varphi}\mathit{\Pi} - M\right) + \bar{h}\left(\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}} - M\right) \\ + 2e\left\{\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}(h+\bar{h})\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right\} + b(a_1 + a_2) + M\zeta\varphi\,. \end{aligned} \tag{4.3.41}$$

ここで，$b = b(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実スカラー場で，中西・ロートラップ場としての役割を果たしている．また，$\zeta = \zeta(\tau)$ はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の実場である．このとき，パラメーターの付け替えのもとでの $\zeta(\tau)$ の変換が

$$\zeta(\tau) \to \zeta'(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'}\zeta(\tau) \tag{4.3.42}$$

と与えられるとする．すると，ラグランジアン (4.3.41) から定まる作用積分 S はパラメーターの付け替えのもとで不変になる．条件 (4.3.39) と (4.3.40) はそれぞれ，ラグランジアン (4.3.41) の b と ζ に関するオイラー・ラグランジュ方程式として導かれる．いま，式 (4.3.20) と式 (4.3.35d) は，ラグランジアンに新たな項 $L_{\mathrm{N}} := b(a_1 + a_2) + M\zeta\varphi$ が付加されたことで

$$\bar{Z}^1_A Z^A_1 + b = 0\,, \quad \bar{Z}^2_A Z^A_2 + b = 0\,, \tag{4.3.43}$$

$$\sqrt{2}e^{-i\varphi}\mathit{\Pi}h - \sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}}\bar{h} + iM\zeta = 0 \tag{4.3.44}$$

と変形される．一方，オイラー・ラグランジュ方程式 (4.3.35a)，(4.3.35b)，(4.3.35c)，(4.3.35e) は，L_{N} が付加されても不変である．したがって，式 (4.3.44) は

$$h - \bar{h} + i\zeta = 0 \tag{4.3.45}$$

に帰着する．式 (4.3.45) と式 (4.3.33) から，

$$h = \frac{1}{2}(\tilde{f} - i\zeta) \tag{4.3.46}$$

が得られるので，$-\zeta/2$ は h の虚数部分に相当することがわかる．

4.4 正準形式

この節では，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.41) に基づく正準形式を展開する．

ラグランジアン (4.3.41) における一般化座標は $(Z_i^A, \bar{Z}_A^i, a_i, b, e, h, \bar{h}, \varphi, \zeta, \tilde{g})$ であり，これらに対応する一般化速度は $(\dot{Z}_i^A, \dot{\bar{Z}}_A^i, \dot{a}_i, \dot{b}, \dot{e}, \dot{h}, \dot{\bar{h}}, \dot{\varphi}, \dot{\zeta}, \dot{\tilde{g}})$ である．このとき，ラグランジアン (4.3.41) から導かれる正準運動量は次式となる:

$$P_A^i := \frac{\partial L}{\partial \dot{Z}_i^A} = \frac{i}{2}\bar{Z}_A^i\,, \tag{4.4.1a}$$

$$\bar{P}_i^A := \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{Z}}_A^i} = -\frac{i}{2}Z_i^A\,, \tag{4.4.1b}$$

$$P^{(a)i} := \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} = 0\,, \tag{4.4.1c}$$

$$P^{(b)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{b}} = 0\,, \tag{4.4.1d}$$

$$P^{(e)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0\,, \tag{4.4.1e}$$

$$P^{(h)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{h}} = 0\,, \tag{4.4.1f}$$

$$P^{(\bar{h})} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{h}}} = 0\,, \tag{4.4.1g}$$

$$P^{(\varphi)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0\,, \tag{4.4.1h}$$

$$P^{(\zeta)} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = 0\,, \tag{4.4.1i}$$

$$P^{(\tilde{g})} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{g}}} = 0\,. \tag{4.4.1j}$$

式 (4.4.1) と式 (4.3.41) を用いると，正準ハミルトニアン H_{C} は次のように与えら

れる:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{C}} :=& \dot{Z}_i^A P_A^i + \dot{\bar{Z}}_A^i \bar{P}_i^A + \dot{a}_i P^{(a)i} + \dot{b} P^{(b)} + \dot{e} P^{(e)} \\
&+ \dot{h} P^{(h)} + \dot{\bar{h}} P^{(\bar{h})} + \dot{\varphi} P^{(\varphi)} + \dot{\zeta} P^{(\zeta)} + \dot{\tilde{g}} P^{(\tilde{g})} - L \\
=& - \sum_{i=1,2} a_i (\bar{Z}_A^i Z_i^A + b) - h \left(\sqrt{2} e^{-i\varphi} \mathit{\Pi} - M \right) - \bar{h} \left(\sqrt{2} e^{i\varphi} \bar{\mathit{\Pi}} - M \right) \\
&- 2e \left\{ \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma + 1} (h + \bar{h}) \tilde{g} |\mathit{\Pi}| - |k| \right\} - M\zeta\varphi \, . \qquad (4.4.2)
\end{aligned}
$$

いま，正準座標 $(Z_i^A, \bar{Z}_A^i, a_i, b, e, h, \bar{h}, \varphi, \zeta, \tilde{g})$ とそれに対応する正準運動量 $(P_A^i, \bar{P}_i^A, P^{(a)i}, P^{(b)}, P^{(e)}, P^{(h)}, P^{(\bar{h})}, P^{(\varphi)}, P^{(\zeta)}, P^{(\tilde{g})})$ を用いて，ポアソン括弧を次のように定義する:

$$
\begin{aligned}
\{A, B\} :=& \left(\frac{\partial A}{\partial Z_i^A} \frac{\partial B}{\partial P_A^i} - \frac{\partial A}{\partial P_A^i} \frac{\partial B}{\partial Z_i^A} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{Z}_A^i} \frac{\partial B}{\partial \bar{P}_i^A} - \frac{\partial A}{\partial \bar{P}_i^A} \frac{\partial B}{\partial \bar{Z}_A^i} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial A}{\partial a_i} \frac{\partial B}{\partial P^{(a)i}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(a)i}} \frac{\partial B}{\partial a_i} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial B}{\partial P^{(b)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(b)}} \frac{\partial B}{\partial b} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial A}{\partial e} \frac{\partial B}{\partial P^{(e)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(e)}} \frac{\partial B}{\partial e} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial B}{\partial P^{(h)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(h)}} \frac{\partial B}{\partial h} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{h}} \frac{\partial B}{\partial P^{(\bar{h})}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\bar{h})}} \frac{\partial B}{\partial \bar{h}} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial B}{\partial P^{(\varphi)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\varphi)}} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial B}{\partial P^{(\zeta)}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\zeta)}} \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \tilde{g}} \frac{\partial B}{\partial P^{(\tilde{g})}} - \frac{\partial A}{\partial P^{(\tilde{g})}} \frac{\partial B}{\partial \tilde{g}} \right) . \qquad (4.4.3)
\end{aligned}
$$

式 (4.4.3) から，正準座標と正準運動量の間のポアソン括弧は次のようになる:

$$
\left\{ Z_i^A, P_B^j \right\} = \delta_i^j \delta_B^A \, , \qquad \left\{ \bar{Z}_A^i, \bar{P}_j^B \right\} = \delta_j^i \delta_A^B \, , \qquad (4.4.4a)
$$

$$
\left\{ a_i, P^{(a)i} \right\} = \delta_i^j \, , \qquad \left\{ b, P^{(b)} \right\} = 1 \, , \qquad (4.4.4b)
$$

$$
\left\{ e, P^{(e)} \right\} = 1 \, , \qquad \left\{ h, P^{(h)} \right\} = 1 \, , \qquad (4.4.4c)
$$

$$
\left\{ \bar{h}, P^{(\bar{h})} \right\} = 1 \, , \qquad \left\{ \varphi, P^{(\varphi)} \right\} = 1 \, , \qquad (4.4.4d)
$$

$$
\left\{ \zeta, P^{(\zeta)} \right\} = 1 \, , \qquad \left\{ \tilde{g}, P^{(\tilde{g})} \right\} = 1 \, . \qquad (4.4.4e)
$$

正準座標と正準運動量の間のその他のポアソン括弧は 0 になる．

式 (4.4.1) から，第一次拘束条件は次のようになることがわかる:

$$\phi^i_A := P^i_A - \frac{i}{2}\bar{Z}^i_A \approx 0\,, \tag{4.4.5a}$$

$$\bar{\phi}^A_i := \bar{P}^A_i + \frac{i}{2}Z^A_i \approx 0\,, \tag{4.4.5b}$$

$$\phi^{(a)i} := P^{(a)i} \approx 0\,, \tag{4.4.5c}$$

$$\phi^{(b)} := P^{(b)} \approx 0\,, \tag{4.4.5d}$$

$$\phi^{(e)} := P^{(e)} \approx 0\,, \tag{4.4.5e}$$

$$\phi^{(h)} := P^{(h)} \approx 0\,, \tag{4.4.5f}$$

$$\phi^{(\bar{h})} := P^{(\bar{h})} \approx 0\,, \tag{4.4.5g}$$

$$\phi^{(\varphi)} := P^{(\varphi)} \approx 0\,, \tag{4.4.5h}$$

$$\phi^{(\zeta)} := P^{(\zeta)} \approx 0\,, \tag{4.4.5i}$$

$$\phi^{(\tilde{g})} := P^{(\tilde{g})} \approx 0\,. \tag{4.4.5j}$$

ここで，$\approx$ は弱い等号を表している．これ以降，$\phi^i_A, \bar{\phi}^A_i, \phi^{(a)i}, \phi^{(b)}, \phi^{(e)}, \phi^{(h)}, \phi^{(\bar{h})}$, $\phi^{(\varphi)}, \phi^{(\zeta)}, \phi^{(\tilde{g})}$ を一次の拘束量と呼ぶ．ここから Dirac による特異系の正準形式を展開する方法 [54–56] に従って，ラグランジアン (4.3.41) に基づく正準形式を展開していく．そのためにまず式 (4.4.4a)–(4.4.4e) を用いて一次の拘束量の間のポアソン括弧を計算すると，

$$\left\{\phi^i_A, \bar{\phi}^B_j\right\} = -i\delta^i_j\delta^B_A \tag{4.4.6}$$

が得られる．一次の拘束量の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，一次

の拘束量と正準ハミルトニアン (4.4.2) の間のポアソン括弧は次のようになる:

$$\left\{\phi_A^i, H_{\mathrm{C}}\right\} = a_i \bar{Z}_A^i + \left(\sqrt{2}e^{-i\varphi}h + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\bar{\mathit{\Pi}}}{|\mathit{\Pi}|}\right)\epsilon^{ij}I_{AB}Z_j^B\,, \tag{4.4.7a}$$

$$\left\{\bar{\phi}_i^A, H_{\mathrm{C}}\right\} = a_i Z_i^A + \left(\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{h} + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\mathit{\Pi}}{|\mathit{\Pi}|}\right)\epsilon_{ij}I^{AB}\bar{Z}_B^j\,, \tag{4.4.7b}$$

$$\left\{\phi^{(a)i}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \bar{Z}_A^i Z_i^A + b\,, \tag{4.4.7c}$$

$$\left\{\phi^{(b)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = a_1 + a_2\,, \tag{4.4.7d}$$

$$\left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 2\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}(h+\bar{h})\tilde{g}|\mathit{\Pi}| - |k|\right)\,, \tag{4.4.7e}$$

$$\left\{\phi^{(h)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \sqrt{2}e^{-i\varphi}\mathit{\Pi} - M + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\mathit{\Pi}|\,, \tag{4.4.7f}$$

$$\left\{\phi^{(\bar{h})}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}} - M + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\mathit{\Pi}|\,, \tag{4.4.7g}$$

$$\left\{\phi^{(\varphi)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = -i\sqrt{2}\left(e^{-i\varphi}\mathit{\Pi}h - e^{i\varphi}\bar{\mathit{\Pi}}\bar{h}\right) + M\zeta\,, \tag{4.4.7h}$$

$$\left\{\phi^{(\zeta)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = M\varphi\,, \tag{4.4.7i}$$

$$\left\{\phi^{(\tilde{g})}, H_{\mathrm{C}}\right\} = \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})|\mathit{\Pi}|\,. \tag{4.4.7j}$$

ここで，式 (4.4.7a)，式 (4.4.7b)，式 (4.4.7c) における添字 i については和をとらないことに注意する．また，I_{AB} と I^{AB} の定義は

$$I_{AB} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}\,, \quad I^{AB} := \begin{pmatrix} \epsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4.8}$$

である．この式はインフィニティツイスター [41,42,84] と呼ばれている．いま，正準ハミルトニアン (4.4.2) と一次の拘束量 (4.4.5b)–(4.4.5j) から，全ハミルトニアン H_{T} を

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{T}} :=\, & H_{\mathrm{C}} + u_i^A\phi_A^i + \bar{u}_A^i\bar{\phi}_i^A + u_{(a)i}\phi^{(a)i} + u_{(b)}\phi^{(b)} + u_{(e)}\phi^{(e)} \\ & + u_{(h)}\phi^{(h)} + u_{(\bar{h})}\phi^{(\bar{h})} + u_{(\varphi)}\phi^{(\varphi)} + u_{(\zeta)}\phi^{(\zeta)} + u_{(\tilde{g})}\phi^{(\tilde{g})} \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

と定義する．ここで，$u_i^A, \bar{u}_A^i, u_{(a)i}, u_{(b)}, u_{(e)}, u_{(h)}, u_{(\bar{h})}, u_{(\varphi)}, u_{(\zeta)}, u_{(\tilde{g})}$ はそれぞれの拘束条件に対応するラグランジュ未定係数であり，一般にパラメーター τ に依存する．正準変数の関数 $\mathcal{F}$ に対する時間発展の方程式は，全ハミルトニアン (4.4.9) を

用いて，

$$\dot{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F}, H_{\mathrm{T}}\} \tag{4.4.10}$$

と与えられる．式 (4.4.10) とポアソン括弧の結果 (4.4.6) と (4.4.7) を用いると，一次の拘束量に対する時間発展を求めることができる．また，第一次拘束条件 (4.4.5) は任意の時刻で成り立たなければならないので，一次の拘束量の時間発展は変化しないという要請が必要である．これらのことから，次の整合性の条件が得られる:

$$\dot{\phi}^i_A = \left\{\phi^i_A, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx a_i \bar{Z}^i_A + \left(\sqrt{2}e^{-i\varphi}h + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\bar{\Pi}}{|\Pi|}\right)\epsilon^{ij} I_{AB} Z^B_j - i\bar{u}^i_A \approx 0\,, \tag{4.4.11a}$$

$$\dot{\bar{\phi}}^A_i = \left\{\bar{\phi}^A_i, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx a_i Z^A_i + \left(\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{h} + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\Pi}{|\Pi|}\right)\epsilon_{ij} I^{AB} \bar{Z}^j_B + iu^A_i \approx 0\,, \tag{4.4.11b}$$

$$\dot{\phi}^{(a)i} = \left\{\phi^{(a)i}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \bar{Z}^i_A Z^A_i + b \approx 0\,, \tag{4.4.11c}$$

$$\dot{\phi}^{(b)} = \left\{\phi^{(b)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx a_1 + a_2 \approx 0\,, \tag{4.4.11d}$$

$$\dot{\phi}^{(e)} = \left\{\phi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx 2\left(\frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}(h+\bar{h})\tilde{g}|\Pi| - |k|\right) \approx 0\,, \tag{4.4.11e}$$

$$\dot{\phi}^{(h)} = \left\{\phi^{(h)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \sqrt{2}e^{-i\varphi}\Pi - M + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\Pi| \approx 0\,, \tag{4.4.11f}$$

$$\dot{\phi}^{(\bar{h})} = \left\{\phi^{(\bar{h})}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{\Pi} - M + \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e\tilde{g}|\Pi| \approx 0\,, \tag{4.4.11g}$$

$$\dot{\phi}^{(\varphi)} = \left\{\phi^{(\varphi)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx -i\sqrt{2}\left(e^{-i\varphi}\Pi h - e^{i\varphi}\bar{\Pi}\bar{h}\right) + M\zeta \approx 0\,, \tag{4.4.11h}$$

$$\dot{\phi}^{(\zeta)} = \left\{\phi^{(\zeta)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx M\varphi \approx 0\,, \tag{4.4.11i}$$

$$\dot{\phi}^{(\tilde{g})} = \left\{\phi^{(\tilde{g})}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \frac{4\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})|\Pi| \approx 0\,. \tag{4.4.11j}$$

式 (4.4.11) に対しては次の 2 つの場合が考えられる : (1) ラグランジュ未定係数 u を決める場合，(2) ラグランジュ未定係数 u を含まず新たな拘束条件を決める場合．式 (4.4.11a) と式 (4.4.11b) は (1) の場合になっていて，$\bar{u}^i_A$ と u^A_i は

$$\bar{u}^i_A = -ia_i \bar{Z}^i_A - i\left(\sqrt{2}e^{-i\varphi}h + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\bar{\Pi}}{|\Pi|}\right)\epsilon^{ij} I_{AB} Z^B_j\,, \tag{4.4.12a}$$

$$u^A_i = ia_i Z^A_i + i\left(\sqrt{2}e^{i\varphi}\bar{h} + \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\gamma+1}e(h+\bar{h})\tilde{g}\frac{\Pi}{|\Pi|}\right)\epsilon_{ij} I^{AB} \bar{Z}^j_B \tag{4.4.12b}$$

と定まる．式 (4.4.11c)–(4.4.11j) は (2) の場合になっていて，まず式 (4.4.11c) と式 (4.4.11d) は，

$$\bar{Z}^i_A Z^A_i + b \approx 0 \quad (\text{添字}\, i\, \text{は和をとらない})\,, \tag{4.4.13}$$

$$a_1 + a_2 \approx 0 \tag{4.4.14}$$

を与える．式 (4.4.11i) は，$M \neq 0$ より，

$$\varphi \approx 0 \tag{4.4.15}$$

となる．また，式 (4.4.11j) は，$|\mathit{\Pi}| \neq 0$, $h \neq 0$, $\bar{h} \neq 0$, $\gamma \neq 0$ より，

$$e \approx 0\,. \tag{4.4.16}$$

となる．式 (4.4.11f) と式 (4.4.11g) はそれぞれ，式 (4.4.15) と式 (4.4.16) を用いると，

$$\sqrt{2}\mathit{\Pi} - M \approx 0\,, \tag{4.4.17}$$

$$\sqrt{2}\bar{\mathit{\Pi}} - M \approx 0 \tag{4.4.18}$$

に帰着する．さらに，式 (4.4.11e) は，式 (4.4.17) を用いると，

$$(h + \bar{h})\tilde{g} - \frac{(\gamma + 1)|k|}{2\sqrt{\gamma}M} \approx 0 \tag{4.4.19}$$

と表せる．そして，式 (4.4.11h) は，式 (4.4.17) と式 (4.4.18) から，

$$i\left(h - \bar{h}\right) - \zeta \approx 0 \tag{4.4.20}$$

となる．いま，式 (4.4.13)–(4.4.20) から，第二次拘束条件は次のように与えられる:

$$\chi^{(a)i} := \bar{Z}^i_A Z^A_i + b \approx 0 \quad (\text{添字}\, i\, \text{は和をとらない})\,, \tag{4.4.21a}$$

$$\chi^{(b)} := a_1 + a_2 \approx 0\,, \tag{4.4.21b}$$

$$\chi^{(e)} := (h + \bar{h})\tilde{g} - \frac{(\gamma + 1)|k|}{2\sqrt{\gamma}M} \approx 0\,, \tag{4.4.21c}$$

$$\chi^{(h)} := \sqrt{2}\mathit{\Pi} - M \approx 0\,, \tag{4.4.21d}$$

$$\chi^{(\bar{h})} := \sqrt{2}\bar{\mathit{\Pi}} - M \approx 0\,, \tag{4.4.21e}$$

$$\chi^{(\varphi)} := i\left(h - \bar{h}\right) - \zeta \approx 0\,, \tag{4.4.21f}$$

$$\chi^{(\zeta)} := \varphi \approx 0\,, \tag{4.4.21g}$$

$$\chi^{(\tilde{g})} := e \approx 0\,. \tag{4.4.21h}$$

これ以降，$\chi^{(a)i}, \chi^{(b)}, \chi^{(e)}, \chi^{(h)}, \chi^{(\bar{h})}, \chi^{(\varphi)}, \chi^{(\zeta)}, \chi^{(\tilde{g})}$ を二次の拘束量と呼ぶ．二次の拘束量 χ と一次の拘束量 ϕ の間のポアソン括弧は，次のようになる:

$$\left\{\chi^{(a)i}, \phi_A^j\right\} = \delta_i^j \bar{Z}_A^i\,, \qquad \left\{\chi^{(a)i}, \bar{\phi}_j^A\right\} = \delta_j^i Z_i^A\,, \tag{4.4.22a}$$

$$\left\{\chi^{(a)i}, \phi^{(b)}\right\} = 1\,, \qquad \left\{\chi^{(b)}, \phi^{(a)i}\right\} = 1\,, \tag{4.4.22b}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{(h)}\right\} = \tilde{g}\,, \qquad \left\{\chi^{(e)}, \phi^{(\bar{h})}\right\} = \tilde{g}\,, \tag{4.4.22c}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \phi^{(\tilde{g})}\right\} = h + \bar{h}\,, \qquad \left\{\chi^{(\tilde{g})}, \phi^{(e)}\right\} = 1\,, \tag{4.4.22d}$$

$$\left\{\chi^{(h)}, \phi_A^i\right\} = \sqrt{2}\epsilon^{ij} I_{AB} Z_j^B\,, \qquad \left\{\chi^{(\bar{h})}, \bar{\phi}_i^A\right\} = \sqrt{2}\epsilon_{ij} I^{AB} \bar{Z}_B^j\,, \tag{4.4.22e}$$

$$\left\{\chi^{(\varphi)}, \phi^{(h)}\right\} = i\,, \qquad \left\{\chi^{(\varphi)}, \phi^{(\bar{h})}\right\} = -i\,, \tag{4.4.22f}$$

$$\left\{\chi^{(\varphi)}, \phi^{(\zeta)}\right\} = -1\,, \qquad \left\{\chi^{(\zeta)}, \phi^{(\varphi)}\right\} = 1\,. \tag{4.4.22g}$$

二次の拘束量 χ と一次の拘束量 ϕ の間のその他のポアソン括弧は 0 となる．また，二次の拘束量 $\chi^{(a)i}, \chi^{(b)}, \chi^{(e)}, \chi^{(h)}, \chi^{(\bar{h})}, \chi^{(\varphi)}, \chi^{(\zeta)}, \chi^{(\tilde{g})}$ と正準ハミルトニアンとのポアソン括弧は，次式となる:

$$\left\{\chi^{(a)i}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \qquad \left\{\chi^{(b)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \tag{4.4.23a}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \qquad \left\{\chi^{(h)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \tag{4.4.23b}$$

$$\left\{\chi^{(\bar{h})}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \qquad \left\{\chi^{(\varphi)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \tag{4.4.23c}$$

$$\left\{\chi^{(\zeta)}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,, \qquad \left\{\chi^{(\tilde{g})}, H_{\mathrm{C}}\right\} = 0\,. \tag{4.4.23d}$$

ここから，式 (4.4.10)，式 (4.4.22)，式 (4.4.23) を用いて，二次の拘束量の時間発展を求める．まず，$\chi^{(a)i}$ の時間発展は，公式

$$I_{AB} Z_i^A Z_j^B = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \pi_{i\dot{\alpha}} \pi_{j\dot{\beta}} = \mathit{\Pi} \epsilon_{ij} \tag{4.4.24a}$$

$$I^{AB} \bar{Z}_A^i \bar{Z}_B^j = \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\pi}_\alpha^i \bar{\pi}_\beta^j = \bar{\mathit{\Pi}} \epsilon^{ij} \tag{4.4.24b}$$

と式 (4.4.12a)，式 (4.4.12b)，式 (4.4.21d)，式 (4.4.21e)，式 (4.4.21f)，式 (4.4.21g)，式 (4.4.21h) を用いると，

$$\dot{\chi}^{(a)i} = \left\{\chi^{(a)i}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u_i^A \bar{Z}_A^i + \bar{u}_A^i Z_i^A + u_{(b)} \approx -M\zeta + u_{(b)} \tag{4.4.25}$$

と求まる．この式で添字 i については和をとらないことに注意する．式 (4.4.25) は整合性の条件より $\dot{\chi}^{(a)i} \approx 0$ となるので，$u_{(b)}$ は

$$u_{(b)} = M\zeta \tag{4.4.26}$$

と定まる．次に，$\chi^{(b)}$ と $\chi^{(e)}$ の時間発展は

$$\dot{\chi}^{(b)} = \left\{\chi^{(b)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u_{(a)1} + u_{(a)2}\,, \tag{4.4.27a}$$

$$\dot{\chi}^{(e)} = \left\{\chi^{(e)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx \left(u_{(h)} + u_{(\bar{h})}\right)\tilde{g} + u_{(\tilde{g})}\left(h + \bar{h}\right) \tag{4.4.27b}$$

と求まる．また，$\chi^{(h)}$ の時間発展は，$I_{AB}I^{AC} = 0$ が成り立つことと式 (4.4.12b)，式 (4.4.24a)，式 (4.4.21d)，式 (4.4.21b) を用いると，

$$\begin{aligned}\dot{\chi}^{(h)} = \left\{\chi^{(h)}, H_{\mathrm{T}}\right\} &\approx \sqrt{2}\epsilon^{ij} I_{AB} u_i^A Z_j^B = i\sqrt{2}\Pi \sum_{i=1,2} \epsilon_{ij}\epsilon^{ij} a_i \\ &\approx iM\left(a_1 + a_2\right) = iM\chi^{(b)} \approx 0\end{aligned} \tag{4.4.28}$$

と計算される．したがって，$\dot{\chi}^{(h)} \approx 0$ は恒等的に満たされる．同様に，$\dot{\chi}^{(\bar{h})} \approx 0$ も恒等的に満たされることを示すことができる．さらに，$\chi^{(\varphi)}, \chi^{(\zeta)}, \chi^{(\tilde{g})}$ の時間発展はそれぞれ，次のように求まる:

$$\dot{\chi}^{(\varphi)} = \left\{\chi^{(\varphi)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx i\left(u_{(h)} - u_{(\bar{h})}\right) - u_{(\zeta)}\,, \tag{4.4.29a}$$

$$\dot{\chi}^{(\zeta)} = \left\{\chi^{(\zeta)}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u_{(\varphi)}\,, \tag{4.4.29b}$$

$$\dot{\chi}^{(\tilde{g})} = \left\{\chi^{(\tilde{g})}, H_{\mathrm{T}}\right\} \approx u_{(e)}\,. \tag{4.4.29c}$$

式 (4.4.27a)，式 (4.4.27b) と式 (4.4.29a) はそれぞれ，整合性の条件より，$\dot{\chi}^{(b)} \approx 0, \dot{\chi}^{(e)} \approx 0, \dot{\chi}^{(\varphi)} \approx 0$ となるので，次の式が得られる:

$$u_{(a)1} + u_{(a)2} = 0\,, \tag{4.4.30a}$$

$$u_{(\tilde{g})} = -\frac{\tilde{g}}{h + \bar{h}}\left(u_{(h)} + u_{(\bar{h})}\right)\,, \tag{4.4.30b}$$

$$u_{(\zeta)} = i\left(u_{(h)} - u_{(\bar{h})}\right)\,. \tag{4.4.30c}$$

また，式 (4.4.29b) と式 (4.4.29c) は，整合性の条件より，$\dot{\chi}^{(\zeta)} \approx 0$ と $\dot{\chi}^{(\tilde{g})} \approx 0$ となるので，未定係数 $u_{(\varphi)}$ と $u_{(e)}$ はそれぞれ

$$u_{(\varphi)} = 0\,, \tag{4.4.31}$$

$$u_{(e)} = 0 \tag{4.4.32}$$

と定まる．以上の手続きから新たな拘束条件は現れないことがわかる．したがって，ラグランジアン (4.3.41) から得られる拘束条件をすべて導くことができた．いま，$u_{(a)1}+u_{(a)2}$, $u_{(\varphi)}$, $u_{(e)}$ はそれぞれ 0 に定まり，u_i^A, $\bar{u}_A^i$, $u_{(b)}$, $u_{(\zeta)}$, $u_{(\tilde{g})}$ はそれぞれ正準座標のような他の力学変数を用いて表されることがわかった．これに対して，$u_{(a)1}-u_{(a)2}$, $u_{(h)}$, $u_{(\bar{h})}$ は τ の任意の関数のまま残り定まらないことが示された．

すべての拘束量間のポアソン括弧の計算をして，式 (4.4.6) と式 (4.4.22) が得られた．しかしながら，これらの結果を基に拘束条件 (4.4.5) と (4.4.21) を第一類拘束条件か第二類拘束条件かに分類することは難しい．そこで，拘束量間のポアソン括弧がより簡単になるように，次の一次結合を考える [61]:

$$\tilde{\phi}^{(\tilde{g})} := \frac{1}{h+\bar{h}}\phi^{(\tilde{g})}\,, \tag{4.4.33a}$$

$$\tilde{\chi}^{(a)i} := \chi^{(a)i} + i\bar{Z}_A^i\bar{\phi}_i^A - i\phi_A^i Z_i^A\,, \tag{4.4.33b}$$

$$\tilde{\chi}^{(h)} := \chi^{(h)} + i\sqrt{2}\epsilon^{jk}I_{AB}\bar{\phi}_j^A Z_k^B - iM\phi^{(b)}\,, \tag{4.4.33c}$$

$$\tilde{\chi}^{(\bar{h})} := \chi^{(\bar{h})} - i\sqrt{2}\epsilon_{jk}I^{AB}\phi_A^j \bar{Z}_B^k + iM\phi^{(b)}\,. \tag{4.4.33d}$$

式 (4.4.33b) において添字 i については和をとらないことに注意する．さらに，次の一次結合を考える:

$$\phi^{(a)\pm} := \frac{1}{2}\left(\phi^{(a)1} \pm \phi^{(a)2}\right)\,, \tag{4.4.34a}$$

$$\tilde{\chi}^{(a)\pm} := \frac{1}{2}\left(\tilde{\chi}^{(a)1} \pm \tilde{\chi}^{(a)2}\right)\,, \tag{4.4.34b}$$

$$\phi^{(+)} := \frac{1}{2\tilde{g}}\left(\phi^{(h)} + \phi^{(\bar{h})}\right) - \tilde{\phi}^{(\tilde{g})}\,, \tag{4.4.34c}$$

$$\phi^{(-)} := \frac{1}{2i}\left(\phi^{(h)} - \phi^{(\bar{h})}\right) + \phi^{(\zeta)}\,, \tag{4.4.34d}$$

このとき，新しい拘束条件の全体

$$\Big(\phi_A^i, \bar{\phi}_i^A, \phi^{(a)\pm}, \phi^{(b)}, \phi^{(e)}, \phi^{(+)}, \phi^{(-)}, \phi^{(\varphi)}, \phi^{(\zeta)}, \tilde{\phi}^{(\tilde{g})},$$
$$\tilde{\chi}^{(a)\pm}, \chi^{(b)}, \chi^{(e)}, \tilde{\chi}^{(h)}, \tilde{\chi}^{(\bar{h})}, \chi^{(\varphi)}, \chi^{(\zeta)}, \chi^{(\tilde{g})}\Big) \approx 0\,. \tag{4.4.35}$$

は式 (4.4.5) と式 (4.4.21) で与えられる元の拘束条件の全体

$$\Big(\phi_A^i, \bar{\phi}_i^A, \phi^{(a)i}, \phi^{(b)}, \phi^{(e)}, \phi^{(h)}, \phi^{(\bar{h})}, \phi^{(\varphi)}, \phi^{(\zeta)}, \phi^{(\tilde{g})},$$
$$\chi^{(a)i}, \chi^{(b)}, \chi^{(e)}, \chi^{(h)}, \chi^{(\bar{h})}, \chi^{(\varphi)}, \chi^{(\zeta)}, \chi^{(\tilde{g})}\Big) \approx 0 \tag{4.4.36}$$

に等しい．また，式 (4.4.35) で与えられる新しい拘束量の間のポアソン括弧は

$$\left\{\phi^i_A, \bar{\phi}^B_j\right\} = -i\delta^i_j\delta^B_A\,, \tag{4.4.37a}$$

$$\left\{\tilde{\chi}^{(a)+}, \phi^{(b)}\right\} = 1\,, \qquad \left\{\chi^{(b)}, \phi^{(a)+}\right\} = 1\,, \tag{4.4.37b}$$

$$\left\{\chi^{(e)}, \tilde{\phi}^{(\tilde{g})}\right\} = 1\,, \qquad \left\{\chi^{(\tilde{g})}, \phi^{(e)}\right\} = 1\,, \tag{4.4.37c}$$

$$\left\{\chi^{(\varphi)}, \phi^{(\zeta)}\right\} = -1\,, \qquad \left\{\chi^{(\zeta)}, \phi^{(\varphi)}\right\} = 1\,. \tag{4.4.37d}$$

を除いてすべて 0 になる．こうして，新しい拘束量を用いて拘束量間のポアソン括弧を簡単にすることができた．式 (4.4.37) で得られたポアソン括弧より，$\phi^{(a)-} \approx 0$, $\phi^{(+)} \approx 0$, $\phi^{(-)} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(a)-} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(h)} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(\bar{h})} \approx 0$ は第一類拘束条件に分類され，一方，$\phi^i_A \approx 0$, $\bar{\phi}^A_i \approx 0$, $\phi^{(a)+} \approx 0$, $\phi^{(b)} \approx 0$, $\phi^{(e)} \approx 0$, $\phi^{(\varphi)} \approx 0$, $\phi^{(\zeta)} \approx 0$, $\tilde{\phi}^{(\tilde{g})} \approx 0$, $\tilde{\chi}^{(a)+} \approx 0$, $\chi^{(b)} \approx 0$, $\chi^{(e)} \approx 0$, $\chi^{(\varphi)} \approx 0$, $\chi^{(\zeta)} \approx 0$, $\chi^{(\tilde{g})} \approx 0$ は第二類拘束条件に分類される．

ここで，ディラックの方法に従って，第二類拘束条件を処理できるように，正準変数の任意関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ に対するディラック括弧を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\mathrm{D}} := \{\mathcal{F}, \mathcal{G}\} &+ i\left\{\mathcal{F}, \phi^i_A\right\}\left\{\bar{\phi}^A_i, \mathcal{G}\right\} - i\left\{\mathcal{F}, \bar{\phi}^A_i\right\}\left\{\phi^i_A, \mathcal{G}\right\} \\
&+ \left\{\mathcal{F}, \tilde{\chi}^{(a)+}\right\}\left\{\phi^{(b)}, \mathcal{G}\right\} - \left\{\mathcal{F}, \phi^{(b)}\right\}\left\{\tilde{\chi}^{(a)+}, \mathcal{G}\right\} \\
&+ \left\{\mathcal{F}, \chi^{(b)}\right\}\left\{\phi^{(a)+}, \mathcal{G}\right\} - \left\{\mathcal{F}, \phi^{(a)+}\right\}\left\{\chi^{(b)}, \mathcal{G}\right\} \\
&+ \left\{\mathcal{F}, \chi^{(e)}\right\}\left\{\tilde{\phi}^{(\tilde{g})}, \mathcal{G}\right\} - \left\{\mathcal{F}, \tilde{\phi}^{(\tilde{g})}\right\}\left\{\chi^{(e)}, \mathcal{G}\right\} \\
&+ \left\{\mathcal{F}, \chi^{(\tilde{g})}\right\}\left\{\phi^{(e)}, \mathcal{G}\right\} - \left\{\mathcal{F}, \phi^{(e)}\right\}\left\{\chi^{(\tilde{g})}, \mathcal{G}\right\} \\
&- \left\{\mathcal{F}, \chi^{(\varphi)}\right\}\left\{\phi^{(\zeta)}, \mathcal{G}\right\} + \left\{\mathcal{F}, \phi^{(\zeta)}\right\}\left\{\chi^{(\varphi)}, \mathcal{G}\right\} \\
&+ \left\{\mathcal{F}, \chi^{(\zeta)}\right\}\left\{\phi^{(\varphi)}, \mathcal{G}\right\} - \left\{\mathcal{F}, \phi^{(\varphi)}\right\}\left\{\chi^{(\zeta)}, \mathcal{G}\right\}\,.
\end{aligned} \tag{4.4.38}$$

第二類拘束条件はすべて，このようなディラック括弧を用いる限り，強い等号 (=) で 0 におくことができる: $\phi^i_A = 0$, $\bar{\phi}^A_i = 0$, $\phi^{(a)+} = 0$, $\phi^{(b)} = 0$, $\phi^{(e)} = 0$, $\phi^{(\varphi)} = 0$, $\phi^{(\zeta)} = 0$, $\tilde{\phi}^{(\tilde{g})} = 0$, $\tilde{\chi}^{(a)+} = 0$, $\chi^{(b)} = 0$, $\chi^{(e)} = 0$, $\chi^{(\varphi)} = 0$, $\chi^{(\zeta)} = 0$, $\chi^{(\tilde{g})} = 0$．こ

の第二類拘束条件から，次の式が導かれる:

$$P_A^i = \frac{i}{2}\bar{Z}_A^i\,, \qquad \bar{P}_i^A = -\frac{i}{2}Z_i^A\,, \tag{4.4.39a}$$

$$a_1 + a_2 = 0\,, \qquad P^{(a)1} + P^{(a)2} = 0\,, \tag{4.4.39b}$$

$$b = -\frac{1}{2}\left(\bar{Z}_A^1 Z_1^A + \bar{Z}_A^2 Z_2^A\right)\,, \qquad P^{(b)} = 0\,, \tag{4.4.39c}$$

$$e = 0\,, \qquad P^{(e)} = 0\,, \tag{4.4.39d}$$

$$\varphi = 0\,, \qquad P^{(\varphi)} = 0\,, \tag{4.4.39e}$$

$$\zeta = i\left(h - \bar{h}\right)\,, \qquad P^{(\zeta)} = 0\,, \tag{4.4.39f}$$

$$\tilde{g} = \frac{(\gamma+1)|k|}{2\sqrt{\gamma}M(h+\bar{h})}\,, \qquad P^{(\tilde{g})} = 0\,. \tag{4.4.39g}$$

したがって，P_A^i, $\bar{P}_i^A$, $a_+ := a_1 + a_2$, $P^{(a)+} := \frac{1}{2}(P^{(a)1} + P^{(a)2})$, b, $P^{(b)}$, e, $P^{(e)}$, φ, e, φ, $P^{(\varphi)}$, ζ_2, $P^{(\zeta)}$, $\tilde{g}$, $P^{(\tilde{g})}$ は式 (4.4.39) によって定まる従属変数で，残りの $\bar{Z}_A^i$, Z_i^A, $a_- := a_1 - a_2$, $P^{(a)-} := \frac{1}{2}(P^{(a)1} - P^{(a)2})$, h, $P^{(h)}$, $\bar{h}$, $P^{(\bar{h})}$ は独立な正準変数であることがわかる．いま，第二類拘束条件はすべて強い等号 (=) で 0 になるので，第一類拘束条件の全体

$$\left(\phi^{(a)-}, \phi^{(+)}, \phi^{(-)}, \tilde{\chi}^{(a)-}, \tilde{\chi}^{(h)}, \tilde{\chi}^{(\bar{h})}\right) \approx 0 \tag{4.4.40}$$

は，次の拘束条件と等価である:

$$\phi^{(a)-} \approx 0\,, \tag{4.4.41a}$$

$$\phi^{(h)} \approx 0\,, \tag{4.4.41b}$$

$$\phi^{(\bar{h})} \approx 0\,, \tag{4.4.41c}$$

$$\chi^{(a)-} \approx 0\,, \tag{4.4.41d}$$

$$\chi^{(h)} \approx 0\,, \tag{4.4.41e}$$

$$\chi^{(\bar{h})} \approx 0\,. \tag{4.4.41f}$$

ここで，

$$\chi^{(a)-} := \frac{1}{2}\left(\chi^{(a)1} - \chi^{(a)2}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{Z}_A^1 Z_1^A - \bar{Z}_A^2 Z_2^A\right) \tag{4.4.42}$$

である．式 (4.4.41) から第一類の第一次拘束条件は 3 つ現れていることが分かる．このことは，3 つの未定係数 $u_{(a)1} - u_{(a)2}, u_{(h)}, u_{(\bar{h})}$ が定まらなかったことと整合している．さて，独立な正準変数 $\bar{Z}^i_A$, Z^A_i, a_-, $P^{(a)-}$, h, $P^{(h)}$, $\bar{h}$, $P^{(\bar{h})}$ の間のディラック括弧は次のようになる:

$$\left\{Z^A_i, \bar{Z}^j_B\right\}_{\mathrm{D}} = -i\delta^j_i \delta^A_B \,, \tag{4.4.43a}$$

$$\left\{Z^A_i, Z^B_j\right\}_{\mathrm{D}} = 0 \,, \qquad \left\{\bar{Z}^i_A, \bar{Z}^j_B\right\}_{\mathrm{D}} = 0 \,, \tag{4.4.43b}$$

$$\left\{a_-, P^{(a)-}\right\}_{\mathrm{D}} = 1 \,, \tag{4.4.43c}$$

$$\left\{h, P^{(h)}\right\}_{\mathrm{D}} = 1 \,, \qquad \left\{\bar{h}, P^{(\bar{h})}\right\}_{\mathrm{D}} = 1 \,. \tag{4.4.43d}$$

正準変数間のその他のディラック括弧は 0 になる．次の節では，このディラック括弧を基に適切な正準量子化の手続きを実行する．

4.5 正準量子化

この節では，第 4.4 節で構成された正準形式を基に剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を実行する．

量子力学に移行するために，関数 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ をそれぞれ対応する演算子 $\hat{\mathcal{F}}$ と $\hat{\mathcal{G}}$ に置き換えて正準交換関係

$$[\hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}}] = i\widehat{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}} \tag{4.5.1}$$

を設定する．ここで，$\widehat{\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}}_{\mathrm{D}}$ はディラック括弧 $\{\mathcal{F}, \mathcal{G}\}_{\mathrm{D}}$ に対応する演算子を表している．式 (4.5.1) と式 (4.4.43) から，次の正準交換関係が定まる:

$$\left[\hat{Z}^A_i, \hat{\bar{Z}}^j_B\right] = \delta^j_i \delta^A_B \,, \tag{4.5.2a}$$

$$\left[\hat{Z}^A_i, \hat{Z}^B_j\right] = 0 \,, \qquad \left[\hat{\bar{Z}}^i_A, \hat{\bar{Z}}^j_B\right] = 0 \,, \tag{4.5.2b}$$

$$\left[\hat{a}_-, \hat{P}^{(a)-}\right] = i \,, \tag{4.5.2c}$$

$$\left[\hat{h}, \hat{P}^{(h)}\right] = i \,, \qquad \left[\hat{\bar{h}}, \hat{P}^{(\bar{h})}\right] = i \,. \tag{4.5.2d}$$

正準変数間のその他の正準交換関係は 0 である．式 (4.5.2a) と式 (4.5.2b) の正準交換関係は，いわゆるツイスター量子化 [41, 42, 45, 46] に一致している．いま，演算

子 $\hat{Z}_i^A$ と $\hat{\bar{Z}}_A^i$ は，ツイスター演算子と呼ばれ，$\hat{Z}_i^A = (\hat{\omega}_i^\alpha, \hat{\pi}_{i\dot{\alpha}})$ と $\hat{\bar{Z}}_A^i = (\hat{\bar{\pi}}_\alpha^i, \hat{\bar{\omega}}^{i\dot{\alpha}})$ のようにスピナー成分で書くことができる．このことに応じて，式 (4.5.2a) は，次のように分けて表すことができる:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{\omega}_i^\alpha, \hat{\bar{\pi}}_\beta^j\right] &= \delta_i^j \delta_\beta^\alpha\,, & \left[\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\omega}}^{j\dot{\beta}}\right] &= \delta_i^j \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\
\left[\hat{\omega}_i^\alpha, \hat{\bar{\omega}}^{j\dot{\beta}}\right] &= 0\,, & \left[\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\pi}}_\beta^j\right] &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.5.3}
$$

量子化の手続きにおいて，第一類拘束条件 (4.4.41) は，第一類の拘束量を対応する演算子に置き換えた後，物理的状態 $|F\rangle$ を定義する条件式として読み替えることで処理される:

$$\hat{\phi}^{(a)-}|F\rangle = \hat{P}^{(a)-}|F\rangle = 0\,, \tag{4.5.4a}$$

$$\hat{\phi}^{(h)}|F\rangle = \hat{P}^{(h)}|F\rangle = 0\,, \tag{4.5.4b}$$

$$\hat{\phi}^{(\bar{h})}|F\rangle = \hat{P}^{(\bar{h})}|F\rangle = 0\,, \tag{4.5.4c}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\chi}^{(a)-}|F\rangle &= \frac{1}{4}\left(\hat{\bar{Z}}_A^1 \hat{Z}_1^A + \hat{Z}_1^A \hat{\bar{Z}}_A^1 - \hat{\bar{Z}}_A^2 \hat{Z}_2^A - \hat{Z}_2^A \hat{\bar{Z}}_A^2\right)|F\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{Z}_1^A \hat{\bar{Z}}_A^1 - \hat{Z}_2^A \hat{\bar{Z}}_A^2\right)|F\rangle = 0\,,
\end{aligned}
\tag{4.5.4d}
$$

$$\hat{\chi}^{(h)}|F\rangle = \left(\sqrt{2}\hat{\mathit{\Pi}} - M\right)|F\rangle = 0\,, \tag{4.5.4e}$$

$$\hat{\chi}^{(\bar{h})}|F\rangle = \left(\sqrt{2}\hat{\bar{\mathit{\Pi}}} - M\right)|F\rangle = 0\,. \tag{4.5.4f}$$

ここで，$\hat{\mathit{\Pi}} := \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}\hat{\pi}_j^{\dot{\alpha}}$, $\hat{\bar{\mathit{\Pi}}} := \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\hat{\bar{\pi}}_\alpha^i \hat{\bar{\pi}}^{j\alpha}$ である．また，$\hat{\chi}^{(a)-}$ に関してはワイル順序 (Weyl order) がとられていて，その後，交換関係 (4.5.2a) を用いて簡潔な形に書き換えられている．演算子 $\hat{\phi}^{(a)-}$, $\hat{\phi}^{(h)}$, $\hat{\phi}^{(\bar{h})}$, $\hat{\chi}^{(a)-}$, $\hat{\chi}^{(h)}$, $\hat{\chi}^{(\bar{h})}$ はそれぞれ，互いに可換であることを示すことができる．このため，物理的状態 $|F\rangle$ は演算子 $\hat{\phi}^{(a)-}$, $\hat{\phi}^{(h)}$, $\hat{\phi}^{(\bar{h})}$, $\hat{\chi}^{(a)-}$, $\hat{\chi}^{(h)}$, $\hat{\chi}^{(\bar{h})}$ の同時固有状態であり，さらなる条件式は発生しないことが言える．

いま，演算子 $\hat{\phi}^{(a)-}$, $\hat{\phi}^{(h)}$, $\hat{\phi}^{(\bar{h})}$, $\hat{\chi}^{(a)-}$, $\hat{\chi}^{(h)}$, $\hat{\chi}^{(\bar{h})}$ はそれぞれ，第 4.8.1 項で与えられるスピンに関するカシミア演算子 $\hat{W}^2$ と $SU(2)$ に関するカシミア演算子 $\hat{T}^2$ と可換であることを示すことができる．さらに，$\hat{W}^2$ と $\hat{T}^2$ は，式 (4.8.21) からわかるように，互いに可換である．したがって，物理的状態 $|F\rangle$ は，式 (4.5.4) と同様に，

$\hat{W}^2$ と $\hat{T}^2$ の同時固有状態として与えられる (式 (4.8.25) と式 (4.8.32) 参照):

$$\hat{W}^2|F\rangle = -J(J+1)|F\rangle\,, \quad J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \tag{4.5.5a}$$

$$\hat{T}^2|F\rangle = I(I+1)|F\rangle\,, \quad I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots. \tag{4.5.5b}$$

ここで，J は粒子のスピン量子数を表している．また，I は J に等しいことが第 4.8.1 項で証明される： $I = J$ (式 (4.8.34) 参照)．このことと式 (4.5.4e)，式 (4.5.4f) を考慮すると，物理的状態 $|F\rangle$ は J と M によって指定されることがわかる．しかしながら，スピンベクター W^μ と粒子の質量 M の間に成り立つ関係式を量子力学的に考察することで，Plyushchay によって導出された質量公式 [9]

$$M_J := \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{J(J+1)}{k^2}}} \tag{4.5.6}$$

が導かれる (式 (4.8.29) 参照)．式 (4.5.6) は，M が J に依存することを意味しているので，$|F\rangle$ は J だけで指定され，$|F_J\rangle$ と表されることが結論される．(ここで，m と k はラグランジアン (4.2.4) において与えられた定数パラメーターであることを指摘しておく．) これ以降，式 (4.5.4) と式 (4.5.5) における $|F\rangle$ と M をそれぞれ $|F_J\rangle$ と M_J と表す．

いま，ブラベクター $\langle Z, a_-, h, \bar{h}|$ を

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}| := \langle 0| \exp\left(-\hat{Z}_i^A \hat{\bar{Z}}_A^i + ia_- \hat{P}^{(a)-} + ih\hat{P}^{(h)} + i\bar{h}\hat{P}^{(\bar{h})}\right) \tag{4.5.7}$$

と定義する．ただし，$\langle 0|$ は

$$\langle 0|\hat{Z}_i^A = \langle 0|\hat{a}_- = \langle 0|\hat{h} = \langle 0|\hat{\bar{h}} = 0 \tag{4.5.8}$$

を満たすとする．さて，交換関係 (4.5.2) を用いると，次の式が求まる:

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{Z}_i^A = Z_i^A \langle Z, a_-, h, \bar{h}|\,, \tag{4.5.9a}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{a}_- = a_- \langle Z, a_-, h, \bar{h}|\,, \tag{4.5.9b}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{h} = h \langle Z, a_-, h, \bar{h}|\,, \tag{4.5.9c}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\bar{h}} = \bar{h} \langle Z, a_-, h, \bar{h}|\,. \tag{4.5.9d}$$

式 (4.5.9a) は

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\omega}_i^\alpha = \omega_i^\alpha \langle Z, a_-, h, \bar{h}|\,, \tag{4.5.10a}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}} = \pi_{i\dot{\alpha}} \langle Z, a_-, h, \bar{h}| \tag{4.5.10b}$$

と分けて表すこともできる．また，次の式もすぐに求まる:

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\bar{Z}}^i_A = -\frac{\partial}{\partial Z_i^A}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \,, \tag{4.5.11a}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{P}^{(a)-} = -i\frac{\partial}{\partial a_-}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \,, \tag{4.5.11b}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{P}^{(h)} = -i\frac{\partial}{\partial h}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \,, \tag{4.5.11c}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{P}^{(\bar{h})} = -i\frac{\partial}{\partial \bar{h}}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \,. \tag{4.5.11d}$$

式 (4.5.11a) もまた

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\bar{\pi}}^i_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \,, \tag{4.5.12a}$$

$$\langle Z, a_-, h, \bar{h}|\hat{\bar{\omega}}^{i\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \pi_{i\dot{\alpha}}}\langle Z, a_-, h, \bar{h}| \tag{4.5.12b}$$

と分けて表すことができる．式 (4.5.4a)–(4.5.4d) のそれぞれに左から $\langle Z, a_-, h, \bar{h}|$ を乗じ，式 (4.5.9)–(4.5.12) を用いると，代数方程式

$$\sqrt{2}\mathit{\Pi} = M_J \tag{4.5.13}$$

と関数 $F_J(Z, a_-, h, \bar{h}) := \langle Z, a_-, h, \bar{h}|F_J\rangle$ に対する連立微分方程式が次のように得られる:

$$\frac{\partial}{\partial a_-}F_J = 0 \,, \tag{4.5.14a}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}F_J = 0 \,, \tag{4.5.14b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{h}}F_J = 0 \,, \tag{4.5.14c}$$

$$\left(Z_1^A\frac{\partial}{\partial Z_1^A} - Z_2^A\frac{\partial}{\partial Z_2^A}\right)F_J = 0 \,, \tag{4.5.14d}$$

$$\epsilon_{ij}\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \omega_i^\alpha}\frac{\partial}{\partial \omega_j^\beta}F_J = \sqrt{2}M_J F_J \,. \tag{4.5.14e}$$

ここで，式 (4.5.13) を導く際，$F_J \neq 0$ を用いた．式 (4.5.14a)–(4.5.14c) は，関数 F_J が a_1, h, $\bar{h}$ に依らないことを示している．したがって，関数 F_J はツイスター変数 Z_i^A $(i = 1, 2)$ のみに依存した関数になり，$F_J = F_J(Z_i^A)$ と表せる．このような

Z_i^A の正則関数はツイスター関数と呼ばれている．また，式 (4.5.13) と式 (4.5.14e) はそれぞれ

$$\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_j^{\dot{\alpha}} = \frac{M_J}{\sqrt{2}}\epsilon_{ij}\,, \tag{4.5.15a}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\omega_i^\alpha}\frac{\partial}{\partial\omega_j^\beta}F_J = \frac{M_J}{\sqrt{2}}\epsilon^{ij}F_J \tag{4.5.15b}$$

と等価であることがすぐにわかる．

いま，変数分離法を用いて式 (4.5.14d) の一般解を求める．実際に $F_J(Z_1^A, Z_2^A) = F_J^{(1)}(Z_1^A)F_J^{(2)}(Z_2^A)$ とおき，これを式 (4.5.14d) に代入すると，式 (4.5.14d) は次の 2 つの方程式に分けられる:

$$Z_1^A\frac{\partial}{\partial Z_1^A}F_J^{(1)} = -2(s_*+1)F_J^{(1)}\,, \tag{4.5.16a}$$

$$Z_2^A\frac{\partial}{\partial Z_2^A}F_J^{(2)} = -2(s_*+1)F_J^{(2)}\,. \tag{4.5.16b}$$

ここで，s_* は定数であり，$F_J^{(i)}$ は Z_i^A だけに依存したツイスター関数である．式 (4.5.16a) と式 (4.5.16b) の解は，次数 $-2s_*-2$ のツイスター関数で与えられる．また，ツイスター関数 $F_J^{(i)}$ は量子論における波動関数に相当しており，$F_J^{(i)}$ に 1 価性を課すことは自然である．実際にこの条件を課すと，次数 $-2s_*-2$ は整数でなければならないので，s_* の値は整数値または半整数値に制限される．これ以降，次数 $-2s_*-2$ のツイスター関数を $F_{Js_*}^{(1)}$ と $F_{Js_*}^{(2)}$ と表す．関数 $F_{Js_*}^{(1)}$ と $F_{Js_*}^{(2)}$ を用いると，式 (4.5.14d) の一般解は

$$F_J(Z) = \sum_{s_*\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} C_{Js_*}F_{Js_*}(Z) \tag{4.5.17}$$

と求まる．ここで，$F_{Js_*}(Z) := F_{Js_*}^{(1)}(Z_1^A)F_{Js_*}^{(2)}(Z_2^A)$ を定義した．また，C_{Js_*} は複素定数係数である．

4.6 ペンローズ変換

この節では，前節で得られたツイスター関数 $F_J(Z)$ のペンローズ変換を行い，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上のスピナー場を求める．このスピナー場は，座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\varpi}^{i\alpha})$ によって張られる空間 (拡張された空間) 上のスピナー場をテイラー展開したとき

の展開係数として得られる．(ここで，$\varpi^{i\alpha}$ についてはこの節の式 (4.6.3) で定義される．) また，$\mathbf{M}$ 上のスピナー場は，付加的な添字を持つ一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすことを示す．

まず，$p+q$ 階のスピナー場 $\Phi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ を得るために，ツイスター関数 $F_J(Z)$ のペンローズ変換

$$\Phi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}=\frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}_{i_p}}F_J(Z)d^4\pi \tag{4.6.1}$$

を考える．ここで，積分測度 $d^4\pi:=d\pi_{1\dot{0}}\wedge d\pi_{1\dot{1}}\wedge d\pi_{2\dot{0}}\wedge d\pi_{2\dot{1}}$ を定義した．今後 $\Phi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ を Φ と略記する場合もある．式 (4.6.1) は適切な積分路 Σ に沿って周回積分を行うことを表していて，その積分は $\pi_{1\dot{0}},\pi_{1\dot{1}},\pi_{2\dot{0}},\pi_{2\dot{1}}$ に関する 4 重の周回積分である．さて，式 (4.3.13) に式 (4.5.13) を用いると，

$$\omega^{\alpha}_1=ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{1\dot{\alpha}}+\frac{M_J}{\sqrt{2}}fg\bar{\pi}^{1\alpha}=\breve{\omega}^{\alpha}_1+\varpi^{1\alpha}\,, \tag{4.6.2a}$$

$$\omega^{\alpha}_2=ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{2\dot{\alpha}}+\frac{M_J}{\sqrt{2}}\gamma f\bar{g}\bar{\pi}^{2\alpha}=\breve{\omega}^{\alpha}_2+\varpi^{2\alpha} \tag{4.6.2b}$$

が導かれる．ここで，

$$\breve{\omega}^{\alpha}_i:=ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{i\dot{\alpha}}\,,\quad \varpi^{1\alpha}:=\frac{M_J}{\sqrt{2}}fg\bar{\pi}^{1\alpha}\,,\quad \varpi^{2\alpha}:=\frac{M_J}{\sqrt{2}}\gamma f\bar{g}\bar{\pi}^{2\alpha} \tag{4.6.3}$$

を定義した．式 (4.6.2) を用いると，(通常の) ナルツイスター $\breve{Z}^A_i:=(\breve{\omega}^{\alpha}_i,\pi_{i\dot{\alpha}})$ を中心とする $F_J(Z)$ のテイラー展開は

$$F_J(Z)=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!}\varpi^{i_{p+1}\alpha_{p+1}}\cdots\varpi^{i_{p+l}\alpha_{p+l}}\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_{p+1}}_{i_{p+1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_{p+l}}_{i_{p+l}}}F_J(\breve{Z}) \tag{4.6.4}$$

と求まる．ここで，$l:=l_1+l_2$ である．また，式 (4.6.4) において，添字 $i_{p+1},\ldots,i_{p+l}$ に含まれている 1 の数は l_1 個で，2 の数は $l_2(=l-l_1)$ 個であることが仮定されている．式 (4.6.4) を式 (4.6.1) に代入して，

$$\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_1}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\omega^{\alpha_p}_{i_p}}F_J(Z)=\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_1}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_p}_{i_p}}F_J(Z) \tag{4.6.5}$$

が成り立つことを用いると，式 (4.6.1) は

$$\begin{aligned}\Phi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}&=\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!}\varpi^{i_{p+1}\alpha_{p+1}}\cdots\varpi^{i_{p+l}\alpha_{p+l}}\\&\quad\times\frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_1}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_{p+l}}_{i_{p+l}}}F_J(\breve{Z})d^4\pi\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

となる．この展開式は，$\varPhi$ が実際に座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \bar{\varpi}^{i\alpha})$ によって張られる空間上のスピナー場であることを意味している．したがって，$\varPhi$ は次のような $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, 0)$ を中心とするテイラー展開として表すこともできる:

$$\begin{aligned}
&\varPhi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\varpi}) \\
&= \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{l_2=0}^{\infty}\frac{1}{l_1!l_2!}\bar{\varpi}^{i_{p+1}\alpha_{p+1}}\cdots\bar{\varpi}^{i_{p+l}\alpha_{p+l}}\varPsi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

ここで，展開係数を

$$\begin{aligned}
&\varPsi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) \\
&:= \frac{\partial}{\partial\bar{\varpi}^{i_{p+1}\alpha_{p+1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar{\varpi}^{i_{p+l}\alpha_{p+l}}}\varPhi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\varpi})\bigg|_{\bar{\varpi}^{i\alpha}=0}
\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

と定義した．この展開係数は，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上のスピナー場そのものである．今後この展開係数も $\varPsi$ と略記する場合がある．式 (4.6.7) と式 (4.6.6) を比較し，$\bar{\varpi}^{i\alpha}$ が任意の複素変数であることを考慮すると，次の式が得られる:

$$\varPsi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\varSigma}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_1}_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^{\alpha_{p+l}}_{i_{p+l}}}F_J(\breve{Z})d^4\pi\,. \tag{4.6.9}$$

こうして，$p+l+q$ 階のスピナー場 $\varPsi$ を $F_J(\breve{Z})$ のペンローズ変換として表すことができた．ペンローズ変換 (4.6.9) は文献 [67] で議論されたペンローズ変換に相当している．しかしながら，式 (4.6.9) の x^μ は複素数ではなく実数である．スピナー場 $\varPsi$ は，点付きと点なしのスピナー添字に加えて，付加的な添字 i と j も持つことをここで指摘しておく．式 (4.6.9) 右辺の構造から，$\varPsi$ が持つ上付き (下付き) の付加的な添字の数と (点付き) のスピナー添字の数は，同じである．また，式 (4.6.9) から，スピナー添字と付加的な添字について次の完全対称性が成り立つことがわかる:

$$\varPsi^{i_1\ldots i_m\ldots i_n\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} = \varPsi^{i_1\ldots i_n\ldots i_m\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.6.10a}$$

$$\varPsi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_a\ldots j_b\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_a\ldots\dot{\alpha}_b\ldots\dot{\alpha}_q} = \varPsi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_b\ldots j_a\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_b\ldots\dot{\alpha}_a\ldots\dot{\alpha}_q}\,. \tag{4.6.10b}$$

式 (4.6.10a) の完全対称性が，$1 \leq m < n \leq p+l$ を満たす任意の m と n に対して成り立つことは，式 (4.6.8) から見出すことはできない．式 (4.6.8) からは，式 (4.6.10a) の完全対称性の一部だけが見出される．

式 (4.5.17) は，Z_i^A を $\breve{Z}_i^A$ に置き換えることで，$F_J(\breve{Z}) = \sum_{s_*\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} C_{Js_*}F_{Js_*}(\breve{Z})$ と表すことができる．この式を式 (4.6.9) に代入すると，

$$\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) = \sum_{s_*\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \frac{C_{Js_*}}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}_{i_1}^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}}F_{Js_*}(\breve{Z})d^4\pi \tag{4.6.11}$$

が得られる．ここで，$i_1,\ldots,i_p$ に含まれている 1 の数を p_1 個として 2 の数を $p_2(=p-p_1)$ 個と仮定する．このとき，$i_1,\ldots,i_{p+l}$ に含まれている 1 の数は p_1+l_1 個になり 2 の数は $p_2+l_2(=p+l-p_1-l_1)$ 個になる．同様に，$j_1,\ldots,j_p$ に含まれている 1 の数を q_1 個として 2 の数を $q_2(=q-q_1)$ 個と仮定する．いま，適切な積分路 Σ に沿って，式 (4.6.11) における無限級数の中の積分を実行する．すると，この積分は，$F_{Js_*}(\breve{Z})$ が $\breve{Z}_1^A=(\breve{\omega}_1^\alpha,\pi_{1\dot{\alpha}})$ と $\breve{Z}_2^A=(\breve{\omega}_2^\alpha,\pi_{1\dot{\alpha}})$ それぞれについて次数 $-2s_*-2$ の斉次関数であることより，

$$s_* = \frac{1}{2}\{q_1-(p_1+l_1)\}\,, \tag{4.6.12a}$$

$$s_* = \frac{1}{2}\{q_2-(p_2+l_2)\} \tag{4.6.12b}$$

のときだけ 0 にならないことを示すことができる．したがって，式 (4.6.11) は

$$\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) = \frac{C_{Js_*}}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}_{i_1}^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}}F_{Js_*}(\breve{Z})d^4\pi \tag{4.6.13}$$

に帰着し，s_* は式 (4.6.12) を満たす値に制限される．いま，s_* は式 (4.6.12) を満たしているので，式 (4.6.12a) と式 (4.6.12b) を用いると，$q_1-(p_1+l_1)=q_2-(p_2+l_2)$ が求まる．さらに，この式を用いると，

$$N_+ := q+(p+l) = 2(q_1+p_2+l_2) = 2(q_2+p_1+l_1)\,, \tag{4.6.14a}$$

$$N_- := q-(p+l) = 2(q_1-p_1-l_1) = 2(q_2-p_2-l_2) = 4s_* \tag{4.6.14b}$$

が導かれる．ここで，N_+ は Ψ の階数を表し，N_- は Ψ が持つ点付き添字と点なし添字の個数の差を表している．式 (4.6.14) から，N_+ と N_- は同時に偶数になることがわかる．さて，スピン量子数 J は，関係式

$$J = \frac{N_+}{2} \tag{4.6.15}$$

を満たしていることが第 4.8.2 項において証明される．式 (4.6.15) と N_+ が偶数であることから，スピン量子数 J は，0 または正の整数値だけをとることがわかる : $J = 0, 1, 2, \ldots$. したがって，剛性を持つ有質量粒子模型は，整数のスピン量子数を持つ有質量粒子のみを記述できることが結論される．この結果は，Plyushchay による結論 [9] に一致している．

次に，スピナー場 $\varPsi$ は付加的な添字を持つ一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たしていることを示す．いま，

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} F_J(\breve{Z}) = \epsilon^{\beta\alpha}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \frac{\partial \breve{\omega}_k^{\gamma}}{\partial x^{\alpha\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_k^{\gamma}} F_J(\breve{Z}) = i\pi_k^{\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_k^{\gamma}} F_J(\breve{Z}) \tag{4.6.16}$$

と計算できる．式 (4.6.16) と式 (4.6.9) を用いると，$\varPsi$ の $x_{\beta\dot{\beta}}$ に関する微分が次のように求まる:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} \varPsi^{i_1 \ldots i_{p+l}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, j_1 \ldots j_q, \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^4} \oint_{\varSigma} \pi_{j_1\dot{\alpha}_1} \cdots \pi_{j_q\dot{\alpha}_q} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_1}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}} \frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} F_J(\breve{Z}) d^4\pi \\
&= \frac{i}{(2\pi i)^4} \oint_{\varSigma} \pi_{j_1\dot{\alpha}_1} \pi_k^{\dot{\beta}} \pi_{j_2\dot{\alpha}_2} \cdots \pi_{j_q\dot{\alpha}_q} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_2}^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}} \epsilon^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_1}^{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_k^{\gamma}} F_J(\breve{Z}) d^4\pi\,.
\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

式 (4.6.17) において，添字 $\dot{\beta}$ と $\dot{\alpha}_1$ の縮約をとり式 (4.5.15a) を用いると，次の式が導かれる:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} \varPsi^{i_1 \ldots i_{p+l}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, j_1 \ldots j_q, \dot{\beta}\dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_q}(x) \\
&= \frac{M_J}{\sqrt{2}} \epsilon^{\beta\gamma} \epsilon_{j_1 k} \frac{i}{(2\pi i)^4} \oint_{\varSigma} \pi_{j_2\dot{\alpha}_2} \cdots \pi_{j_q\dot{\alpha}_q} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_k^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_1}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}} F_J(\breve{Z}) d^4\pi \\
&= \frac{iM_J}{\sqrt{2}} \epsilon^{\beta\gamma} \epsilon_{j_1 k} \varPsi^{k i_1 \ldots i_{p+l}}_{\gamma\alpha_1 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, j_2 \ldots j_q, \dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_q}(x)\,.
\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

同様に，式 (4.6.17) において，添字 β と α_1 の縮約をとり式 (4.5.15b) を用いると，次の式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} \varPsi^{i_1 \ldots i_{p+l}}_{\beta\alpha_2 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, j_1 \ldots j_q, \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x) \\
&= \frac{M_J}{\sqrt{2}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \epsilon^{i_1 k} \frac{i}{(2\pi i)^4} \oint_{\varSigma} \pi_{k\dot{\gamma}} \pi_{j_1\dot{\alpha}_1} \cdots \pi_{j_q\dot{\alpha}_q} \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_2}^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \breve{\omega}_{i_{p+l}}^{\alpha_{p+l}}} F_J(\breve{Z}) d^4\pi \\
&= \frac{iM_J}{\sqrt{2}} \epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \epsilon^{i_1 k} \varPsi^{i_2 \ldots i_{p+l}}_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, k j_1 \ldots j_q, \dot{\gamma}\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x)\,.
\end{aligned} \tag{4.6.19}$$

ここで，Ψ の階数 N_+ は，式 (4.6.18) と式 (4.6.19) の計算の前後で変わらないことを指摘しておく．式 (4.6.18) と式 (4.6.19) から，スピナー場 Ψ は付加的な添字 i と j を持つ一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式

$$i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}}\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\beta}\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_q} + M_J\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon_{j_1 k}\Psi^{ki_1\ldots i_{p+l}}_{\gamma\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_2\ldots j_q,\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_q} = 0\,, \tag{4.6.20a}$$

$$i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}}\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} + M_J\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\epsilon^{i_1 k}\Psi^{i_2\ldots i_{p+l}}_{\alpha_2\ldots\alpha_{p+l}\,;\,kj_1\ldots j_q,\dot{\gamma}\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} = 0 \tag{4.6.20b}$$

を満たしていることがわかる．式 (4.6.20a) と式 (4.6.20b) および

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot{\beta}}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} = \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma\dot{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial x_{\gamma\dot{\gamma}}} \tag{4.6.21}$$

が成り立つことを用いると，クライン・ゴルドン方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta\dot{\beta}}}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}} + M_J^2\right)\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} = 0 \tag{4.6.22}$$

が得られる．この式は，スピナー場 Ψ が質量 M_J を持つ場であることを示している．したがって，式 (4.6.15) を考慮すると，質量 M_J を持つ $2J$ 階のスピナー場 Ψ をペンローズ変換 (4.6.9) として求めることができた．

この節の終わりに，完全対称化された Ψ とペンローズ変換のブラ・ケット記法について述べておく．

完全対称化された Ψ

いま，Ψ が持つ付加的な添字すべてが完全対称化された次の関数を考える:

$$\Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} := \frac{1}{N_+!}\sum_{\varsigma}\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+1)}j_1}\cdots\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+q)}j_q}\Psi^{i_{\varsigma(1)}\cdots i_{\varsigma(p+l)}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\,. \tag{4.6.23}$$

ここで，ς は $(i_1,\ldots,i_{p+l+q})$ に対して置換を施すことを表している．また，$\sum_\varsigma$ は $(i_1,\ldots,i_{p+l+q})$ の置換すべてについて和をとることを表している．(場 $\Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ を $\Psi^{(S)}$ と略記する場合もある.）式 (4.6.23) の $\Psi^{(S)}$ が付加的な添字に関して完全対称であることと式 (4.6.10) を用いると，次の式を示すことができる:

$$\Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} = \Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots\alpha_m\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.6.24a}$$

$$\Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_a\ldots\dot{\alpha}_b\ldots\dot{\alpha}_q} = \Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_b\ldots\dot{\alpha}_a\ldots\dot{\alpha}_q}\,. \tag{4.6.24b}$$

したがって，場 $\Psi^{(S)}$ は点付きと点なしのスピナー添字それぞれに関して完全対称であることがわかる．また，場 $\Psi^{(S)}$ はスピン J の既約表現に属するスピナー場と等価である．さて，式 (4.6.23) と式 (4.6.20a)，式 (4.6.20a) を用いると，次の式が成り立つことを証明できる:

$$i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}}\Psi^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\beta}\dot{\alpha}_2\dots\dot{\alpha}_q} - M_J\epsilon^{\beta\gamma}\Psi^{(S)i_1\dots i_{p+l}}_{\gamma\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_2\dots\dot{\alpha}_q} = 0\,, \tag{4.6.25a}$$

$$i\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_{\beta\dot{\beta}}}\Psi^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\beta\alpha_2\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} + M_J\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\Psi^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_2\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\gamma}\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = 0\,. \tag{4.6.25b}$$

これより，$\Psi^{(S)}$ は (通常の) ディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たしていることがわかる．この結果は，$\Psi^{(S)}$ がスピナー添字について完全対称化されていることと整合している．式 (4.6.22) と式 (4.6.23) から，$\Psi^{(S)}$ が質量 M_J を持つクライン・ゴルドン方程式を満たしていることは明らかである．

ペンローズ変換のブラ・ケット記法

式 (4.5.13) の下で定義された $F_J(Z, a_-, h, \bar{h}) = \langle Z, a_-, h, \bar{h}|F_J\rangle$ と同じように，ツイスター関数 $F_J(\breve{Z})$ を

$$F_J(\breve{Z}) := \langle\breve{Z}|F_J\rangle \tag{4.6.26}$$

と定義する．ここで，

$$\langle\breve{Z}| := \langle 0|\exp\left(-\breve{Z}^A_i\hat{\breve{\bar{Z}}}{}^i_A\right) = \langle 0|\exp\left(-\breve{\omega}^\alpha_i\hat{\bar{\pi}}{}^i_\alpha - \pi_{i\dot{\alpha}}\hat{\bar{\omega}}{}^{i\dot{\alpha}}\right) \tag{4.6.27}$$

である (式 (4.5.7) 参照)．式 (4.6.27) を用いると，次の式がすぐに求まる:

$$\langle\breve{Z}|\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}} = \pi_{i\dot{\alpha}}\langle\breve{Z}|\,, \tag{4.6.28a}$$

$$\langle\breve{Z}|\hat{\bar{\pi}}{}^i_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\breve{\omega}^\alpha_i}\langle\breve{Z}|\,. \tag{4.6.28b}$$

いま，式 (4.6.26) を式 (4.6.9) に代入し，式 (4.6.28a) と式 (4.6.28b) を繰り返し用いると，ペンローズ変換 (4.6.9) は

$$\Psi^{i_1\dots i_{p+l}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(x) = \frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\langle\breve{Z}|\hat{\mathcal{P}}^{i_1\dots i_{p+l}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}|F_J\rangle d^4\pi \tag{4.6.29}$$

と書き換えられる．ここで，$\hat{\mathcal{P}}^{i_1\dots i_{p+l}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}$ は

$$\hat{\mathcal{P}}^{i_1\dots i_{p+l}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} := (-1)^{p+l}\hat{\pi}_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\hat{\pi}_{j_q\dot{\alpha}_q}\hat{\bar{\pi}}{}^{i_1}_{\alpha_1}\cdots\hat{\bar{\pi}}{}^{i_{p+l}}_{\alpha_{p+l}} \tag{4.6.30}$$

である．さらに，式 (4.6.29) は形式的に

$$\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x) = \langle x|\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\rangle \tag{4.6.31}$$

と表される．ここで，次の式を定義した:

$$\langle x| := \frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\langle\breve{Z}|d^4\pi = \frac{1}{(2\pi i)^4}\oint_{\Sigma}\langle ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{i\dot{\alpha}}, \pi_{i\dot{\alpha}}|d^4\pi\,, \tag{4.6.32}$$

$$|\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\rangle := \hat{\mathcal{P}}^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}|F_J\rangle\,. \tag{4.6.33}$$

いま，$|\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\rangle$ の完全対称化は，式 (4.6.23) に従って実行され，

$$|\Psi^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}\rangle := \hat{\mathcal{P}}^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}|F_J\rangle \tag{4.6.34}$$

と与えられる．ここで，

$$\hat{\mathcal{P}}^{(S)i_1\ldots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} := \frac{1}{N_+!}\sum_{\varsigma}\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+1)}j_1}\cdots\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+q)}j_q}\hat{\mathcal{P}}^{i_{\varsigma(1)}\ldots i_{\varsigma(p+l)}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q} \tag{4.6.35}$$

である．この演算子は，第 4.8.2 項において，$\hat{\mathcal{P}}^{(S)}$ と省略される場合もある．

4.7 まとめと今後の課題

本章では，剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を導き，それに基づく正準形式を展開した．その後，剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を実行し，ツイスター関数を得た．同時に，粒子の質量公式を導出した．また，得られたツイスター関数のペンローズ変換を行い，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすスピナー場を求めた．さらに，スピン量子数の値は 0 または正の整数値のみに制限されることを示した．

まず，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.2.21) と等価な 1 次形式のラグランジアン (4.2.4) が与えられた．その後，この 1 次形式のラグランジアンから得られた拘束条件の解がスピナー変数 $\pi_{i\dot{\alpha}}$ とその複素共役 $\bar{\pi}^i_{\alpha}$ を用いて書き下された．この解を 1 次形式のラグランジアン (4.2.4) に代入することで，時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\pi_{i\dot{\alpha}}$ を用いて書かれた剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.10) が導かれた．さらに，このラグランジアンを式 (4.3.18) で定義されたツイスター変数 Z^A_i を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.19) が導出された．このとき，ツイスター変数 Z^A_i はナ

ルツイスター条件 (4.3.20) を満たすことがわかるので，このナルツイスター条件が取り入れられるように，式 (4.3.19) はラグランジュ未定係数 a_i を用いて修正された．この修正された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.22) と (4.3.26) は，局所 $U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとで不変である．また，ラグランジュ未定係数 a_i はパラメーター空間 $\mathcal{T}$ 上の $U(1)$ ゲージ場としての役割を果たしていることがわかる．さらに，修正された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンから直接，質量殻条件 (4.3.30) が得られるように式 (4.3.26) が変形され，変形された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.32) が導出された．このラグランジアン (4.3.32) もまた，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変である．このことを考慮し，ここでは，ラグランジアン (4.3.32) に基づく正準形式と量子化の議論が簡単になるように，$U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性の一部を壊すようなゲージ固定条件 $a_1 + a_2 = 0$ と付加条件 $\varphi = 0$ が課された．このようなゲージ固定条件を課すことは，ラグランジアン (4.3.32) にゲージ固定項 $b(a_1 + a_2)$ とそれと同型の項 $M\zeta\varphi$ を付加することでなされる．また，ゲージ固定条件 $a_1 + a_2 = 0$ を採用し，さらに付加条件 $\varphi = 0$ を採用することで，結果的に，ツイスター変数間の簡潔なディラック括弧 (4.4.43) が得られた[4]．

実際に，ゲージ固定条件の課された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.41) に基づく正準形式を展開すると，そこでは拘束条件が得られ，得られた拘束条件は系統的に第一類と第二類に分類された．その後，第二類拘束条件は，ディラック括弧 (4.4.43) を定義し，正準変数を減らすことで処理された．また，第一類拘束条件は，量子化の手続きを実行した後，物理的状態 $|F\rangle$ を定義する条件式 (4.5.4) として読み換えられた．この条件式は，ツイスター関数 $F_J(Z)$ に対する代数的な質量殻条件 (4.5.13) および連立微分方程式 (4.5.14d) と (4.5.14e) に帰着した．また，微分方程式 (4.5.14d) を満たすツイスター関数 $F_J(Z)$ が，Z_1^A と Z_2^A それぞれについて次数 $-2s_* - 2$ のツイスター関数 $F_{Js_*}(Z)$ を用いて，式 (4.5.17) のように求められた．このとき，次数 $-2s_* - 2$ は，第 3 章と同様にツイスター関数に 1 価性が課されているため，整数値になる．同時に，パウリ・ルバンスキーのスピンベクターと粒子の質量 M の間に成り立つ関係式を量子力学的に考察することで，粒子の質量公式 (4.5.6) が導出された．この式は，粒子の質量 M_J がスピン量子数 J の増加とともに減少することを意味しており，現実の質量スペクトルとはいまのところ一致していない．

[4] ここで，ゲージ固定条件を採用しなければ，ツイスター変数間の複雑なディラック括弧が得られる．この場合は，文献 [67, 72] で考察されたように，ツイスター変数間のディラック括弧を簡潔にするような新たなツイスター変数を定義する必要がある．

いま，ツイスター関数 $F_J(Z)$ は，Plyushchay によって導かれた運動量変数と内部座標に依存した波動関数 [9] に対応するものと考えられる．本研究ではさらに，ツイスター理論の技法を適用し，ツイスター関数のペンローズ変換を実行することで，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上のスピナー場 Ψ が導出された．具体的には，式 (4.5.17) におけるツイスター関数 $F_J(Z)$ のペンローズ変換 (4.6.1) を行うことで，座標 $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \varpi^{i\alpha})$ によって張られた空間上のスピナー場 $\Phi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ が与えられ，その後，Φ の $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, 0)$ を中心とするテーラー展開の展開係数 (4.6.9) として，ミンコフスキー空間 $\mathbf{M}$ 上の $p+l+q$ 階のスピナー場 $\Psi^{i_1\ldots i_{p+l}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ が求められた．さて，スピナー場 Ψ は，スピナー変数に関する点なしの添字と点付きの添字に加えて付加的な上付きの添字と下付きの添字を持っていて，付加的な上付き (下付き) の添字の数と点なし (点付き) のスピナー添字の数は同じになる．また，スピナー場 Ψ の階数 $N_+ \,(=p+l+q)$ は，ツイスター関数 $F_{js_*}(Z)$ が Z_1^A と Z_2^A それぞれについて同じ次数 $-2s_*-2$ であることより，偶数になることが示された．このことと式 (4.6.15) が成り立つことを用いて，スピン量子数 J の値は 0 または正の整数値に制限されることが証明された．このことは，粒子のスピン量子数が半整数値をとる可能性は否定されることを意味するので，Plyushchay の結論を支持する結果が得られた．(したがって，Deriglazov と Nersessian による主張 [14] は否定された．)

スピナー場 Ψ は，付加的な添字を持つ一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式 (4.6.20) を満たすことが示された．この式を基にクライン・ゴルドン方程式 (4.6.22) が導かれ，Ψ は質量 M_J を持つ場であることを明らかにされた．以上のことから，剛性を持つ有質量粒子の模型は，整数のスピン量子数を持つ質量 M_J の有質量粒子のみを記述することが結論された．

最後に，本研究で考察されたツイスター模型は，スピン量子数の値を 0 または正の整数値だけでなく正の半整数値も許されるように，拡張できることを示す．このような拡張を実際に行うために，1 次元の $U(1)$ チャーン・サイモン項

$$S_i = -2s_i \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau a_i \quad (i=1,2) \tag{4.7.1}$$

を導入する．ここで，s_i は実定数である．作用積分 S_i は，場 a_i が適切なパラメーターの付け替えのもとで式 (4.3.23) のように変換するので，パラメーターの付け替えのもとで不変である．また，作用積分 S_i は，θ_i が $\theta_i(\tau_1) = \theta_i(\tau_0)$ のような適切な

境界条件を満たせば，ゲージ変換 (4.3.24) のもとでも不変である．いま，作用積分

$$\tilde{S}=\int_{\tau_0}^{\tau_1}d\tau L+S_1+S_2 \tag{4.7.2}$$

によって定まる拡張されたツイスター模型を与える．ここで，L はツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン (4.3.41) である．式 (4.7.2) によって定まる拡張されたツイスター模型に基づく有質量粒子の正準量子化を実行すると，物理的状態 $|F\rangle$ には，条件式 $\hat{\chi}^{(a)-}|F\rangle=0$ の代わりに，$(\hat{\chi}^{(a)-}-s_-)|F\rangle=0$ が課されるようになる．ここで，$s_-:=s_1-s_2$ である．このとき，s_- の値は整数値または半整数値に制限されることを示すことができる．さらに，式 (4.6.14a) は

$$N_+:=q+(p+l)=2(q_1+p_2+l_2-s_-)=2(q_2+p_1+l_1+s_-) \tag{4.7.3}$$

と修正される．式 (4.7.3) と式 (4.6.15) を用いて，$N_+\geq 0$ であることに注意すると，スピン量子数 J は，0 または正の整数値だけでなく正の半整数値もとることがわかる．こうして，ツイスター模型は，整数または半整数のスピン量子数を持つ有質量粒子を記述できるように拡張された．しかしながら，このような拡張されたツイスター模型は，$s_-\neq 0$ のとき，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子模型とみなすことはできない．そこで，拡張されたツイスター模型に対応する拡張された剛性を持つ有質量粒子模型を構築することは，今後の課題として挙げられる．

4.8 補遺

4.8.1 パウリ・ルバンスキーのスピンベクターと質量公式

ここでは，本章で考察の対象とする系に基づくパウリ・ルバンスキーのスピンベクターを導出し，それに関連した事柄を考察する．また，M と γ の値を求める．

まず，次の無限小ポアンカレ変換を考える:

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu - \varepsilon^\mu \,, \tag{4.8.1a}$$

$$q^\mu \to q'^\mu = q^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu q^\nu \,, \tag{4.8.1b}$$

$$p_\mu \to p'_\mu = p_\mu + \varepsilon_\mu{}^\nu p_\nu \,, \tag{4.8.1c}$$

$$r_\mu \to r'_\mu = r_\mu + \varepsilon_\mu{}^\nu r_\nu \,. \tag{4.8.1d}$$

ここで，$\varepsilon^{\mu\nu}\,(=-\varepsilon^{\nu\mu})$ は無限小ローレンツ変換のパラメーター，ε^μ は無限小並進変換のパラメーターである．1 次形式のラグランジアン (4.2.4) は，このような無限小ポアンカレ変換 (4.8.1) のもとで，不変であることがわかる．したがって，1 次形式のラグランジアン (4.2.4) から得られる ε^μ に対応する保存量 $\mathcal{P}_\mu$ と $\varepsilon^{\mu\nu}$ に対応する保存量 $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ は，ネーターの定理より，

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu \,, \tag{4.8.2}$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + q_\mu r_\nu - q_\nu r_\mu \tag{4.8.3}$$

と求まる．ここで，$\mathcal{P}_\mu$ は 4 元運動量ベクターで，$\mathcal{M}_{\mu\nu}$ は角運動量テンサーである．

いま，パウリ・ルバンスキーのスピンベクターを

$$W^\mu := \frac{1}{2M}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{P}_\nu \mathcal{M}_{\rho\sigma} \tag{4.8.4}$$

と定義する．ここで，4 次元時空におけるレビ・チヴィタの記号 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ を $\varepsilon^{0123}=1$ と定義した．また，M は式 (4.3.12) で定義された質量パラメーターである．スピンベクター W^μ は，$\mathcal{P}_\mu$ と $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ が保存量であるので，保存量になる．式 (4.8.4) に式 (4.8.2) と式 (4.8.3) を代入すると，スピンベクター W^μ は

$$W^\mu = \frac{1}{M}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu q_\rho r_\sigma \tag{4.8.5}$$

となる．この式に公式

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} = -\left(\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\sigma - \delta^\alpha_\nu\delta^\gamma_\rho\delta^\beta_\sigma - \delta^\beta_\nu\delta^\alpha_\rho\delta^\gamma_\sigma + \delta^\beta_\nu\delta^\gamma_\rho\delta^\alpha_\sigma + \delta^\gamma_\nu\delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\sigma - \delta^\gamma_\nu\delta^\beta_\rho\delta^\alpha_\sigma\right) \tag{4.8.6}$$

を用いると，スピンベクターの 2 乗 $W^2 := W_\mu W^\mu$ が

$$W^2 = \frac{1}{M^2}\left\{-p^2q^2r^2 + p^2(q^\mu r_\mu)^2 + q^2(r^\mu p_\mu)^2 + r^2(q^\mu p_\mu)^2 - 2(q^\mu r_\mu)(r^\nu p_\nu)(q^\rho p_\rho)\right\} \tag{4.8.7}$$

と求まる．式 (4.8.7) に式 (4.2.6e)，式 (4.2.6f)，式 (4.2.8)，式 (4.2.9) を用いると，式 (4.8.7) は

$$W^2 = \frac{k^2}{M^2}\left(p^2 - m^2\right) \tag{4.8.8}$$

となる．式 (4.8.8) に式 (4.3.7a) を代入すると，式 (4.8.8) は

$$W^2 = \frac{k^2}{M^2}\left(2|\mathit{\Pi}|^2 - m^2\right) \tag{4.8.9}$$

と表せる．これは，1 次形式のラグランジアンを基に得られた W^2 の表式である．

ツイスター変数で表現されたラグランジアン (4.3.41) から得られるパウリ・ルバンスキーのスピンベクターは，次のようになる (文献 [67] 参照):

$$W^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{M}\left[\left(\bar{\pi}^j_\beta\omega^\beta_i + \bar{\omega}^{j\dot{\beta}}\pi_{i\dot{\beta}}\right)\bar{\pi}^{i\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_j - \frac{1}{2}\left(\bar{\pi}^i_\beta\omega^\beta_i + \bar{\omega}^{i\dot{\beta}}\pi_{i\dot{\beta}}\right)\bar{\pi}^{j\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_j\right]. \tag{4.8.10}$$

式 (4.8.10) は，

$$W^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{M}\left(\delta^l_i\delta^j_k - \frac{1}{2}\delta^j_i\delta^l_k\right)\bar{Z}^k_B Z^B_l \bar{\pi}^{i\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_j \tag{4.8.11}$$

と書くこともできる．また，式 (4.8.10) に式 (4.3.13) と式 (4.3.14) を代入し，その後，式 (4.3.3) を用いると，式 (4.8.10) は式 (4.8.5) に帰着する．式 (4.8.11) に公式

$$\frac{1}{2}\sigma_{ri}{}^j\sigma_{rk}{}^l = \delta^l_i\delta^j_k - \frac{1}{2}\delta^j_i\delta^l_k \tag{4.8.12}$$

を適用すると，式 (4.8.11) は

$$W^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{M}T_r\sigma_{ri}{}^j\bar{\pi}^{i\alpha}\pi^{\dot{\alpha}}_j \tag{4.8.13}$$

と表すことができる．ここで，

$$T_r := \frac{1}{2}\bar{Z}^k_B\sigma_{rk}{}^l Z^B_l \tag{4.8.14}$$

を定義した．この T_r は実数であることがわかる．また，$\sigma_{ri}{}^j$ $(r = 1, 2, 3)$ の添字 (i, j) は，パウリ行列 σ_r の要素を表している．式 (4.8.13) と公式 $\pi_{i\dot{\alpha}}\pi^{\dot{\alpha}}_j = \epsilon_{ij}\mathit{\Pi}$, $\bar{\pi}^i_\alpha\bar{\pi}^{j\alpha} = \epsilon^{ij}\bar{\mathit{\Pi}}$, $\sigma_2\sigma_r\sigma_2 = -\sigma^T_r$ を用いると，スピンベクターの 2 乗 $W^2 = W^{\alpha\dot{\alpha}}W_{\alpha\dot{\alpha}}$ は

$$W^2 = -\frac{2}{M^2}T^2|\mathit{\Pi}|^2, \quad T^2 := T_rT_r \tag{4.8.15}$$

と求まる．

本章における量子化は，交換関係 (4.5.2a) と (4.5.2b) を設定することで与えられたツイスター量子化を意味している．いま，交換関係 (4.5.2a) と (4.5.2b) を用いると，$W^{\alpha\dot{\alpha}}$ に対応するワイル順序がとられた演算子 $\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}$ は，

$$\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}} = \frac{1}{M}\hat{T}_r {\sigma_{ri}}^j \hat{\bar{\pi}}^{i\alpha}\hat{\pi}_j^{\dot{\alpha}} \tag{4.8.16}$$

と与えられる．ここで，

$$\hat{T}_r := \frac{1}{2}\hat{\bar{Z}}_B^k {\sigma_{rk}}^l \hat{Z}_l^B \tag{4.8.17}$$

を定義した．演算子 $\hat{T}_r$ は，$SU(2)$ の交換関係

$$\left[\hat{T}_r, \hat{T}_s\right] = i\epsilon_{rst}\hat{T}_t \tag{4.8.18}$$

を満たすことを示すことができる．また，式 (4.8.18) と交換関係

$$\left[\hat{T}_r, {\sigma_{ri}}^j \hat{\bar{\pi}}^{i\alpha}\hat{\pi}_j^{\dot{\alpha}}\right] = i\epsilon_{rst}{\sigma_{ti}}^j \hat{\bar{\pi}}^{i\alpha}\hat{\pi}_j^{\dot{\alpha}} \tag{4.8.19}$$

が成り立つことを用いると，交換関係

$$\left[\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{T}_r\right] = 0 \tag{4.8.20}$$

がすぐに求まる．式 (4.8.20) から，

$$\left[\hat{W}^2, \hat{T}^2\right] = 0 \tag{4.8.21}$$

が得られる．また，式 (4.8.20) と公式

$$i\epsilon_{rst}{\sigma_{si}}^j {\sigma_{tk}}^l = {\sigma_{rk}}^j \delta_i^l - {\sigma_{ri}}^l \delta_k^j\,, \tag{4.8.22}$$

$$\epsilon^{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}\gamma\dot{\gamma}\delta\dot{\delta}} = i(\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} - \epsilon^{\alpha\delta}\epsilon^{\beta\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\delta}}) \tag{4.8.23}$$

を用いると，

$$\left[\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}, \hat{W}^{\beta\dot{\beta}}\right] = \frac{i}{M}\epsilon^{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}\gamma\dot{\gamma}\delta\dot{\delta}}\hat{p}_{\gamma\dot{\gamma}}\hat{W}_{\delta\dot{\delta}} \tag{4.8.24}$$

が導かれる．ここで，$\hat{p}_{\gamma\dot{\gamma}} := \hat{\bar{\pi}}_\gamma^i \hat{\pi}_{i\dot{\gamma}}$ である．演算子 $\hat{p}_{\gamma\dot{\gamma}}$ は，式 (4.3.3a) の $p_{\alpha\dot{\alpha}}$ に対応する演算子で，$\hat{T}_r$ と $\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}$ と可換である．式 (4.8.24) は，パウリ・ルバンスキーのスピンベクターが満たすべき交換関係である．このようなスピンベクターの 2 乗

$\hat{W}^2 := \hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}\hat{W}_{\alpha\dot{\alpha}}$ は，ポアンカレ代数のスピンに関するカシミア演算子としてよく知られている．

いま，$\hat{W}^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\hat{W}^2$ はそれぞれ，式 (4.5.4) で与えられた演算子

$$\begin{aligned}
&\hat{\phi}^{(a)-} = \hat{P}^{(a)-}\,, \qquad &&\hat{\phi}^{(h)} = \hat{P}^{(h)}\,, \qquad &&\hat{\phi}^{(\bar{h})} = \hat{P}^{(\bar{h})}\,, \\
&\hat{\chi}^{(a)-} = \hat{T}_3\,, &&\hat{\chi}^{(h)} = \sqrt{2}\hat{\Pi} - M\,, &&\hat{\chi}^{(\bar{h})} = \sqrt{2}\hat{\bar{\Pi}} - M
\end{aligned} \tag{4.8.25}$$

と可換であることを示すことができる．このことは，条件式 (4.5.4a)–(4.5.4f) と固有値方程式 $\hat{W}^2|F\rangle = \Lambda|F\rangle$ は同時に成り立つことを意味している．ここで，Λ は演算子 $\hat{W}^2$ の固有値を表している．さて，交換関係 (4.8.24) は，静止系で，$[\hat{W}_r, \hat{W}_s] = i\epsilon_{rst}\hat{W}_t$ に帰着する．このことは，静止系で，式 (4.8.24) を $|F\rangle$ に作用させ，式 (4.5.4e) と式 (4.5.4f) を用いることで確かめられる．こうして，演算子 $\hat{W}_r$ は $SU(2)$ に関する交換関係を満たしていることがわかるので，$\hat{W}_r\hat{W}_r$ の固有値は，適切な条件のもとで $J(J+1)$ と求まる．ここで，J は非負の整数値または半整数値をとるスピン量子数である．したがって，固有値 Λ は，$\hat{W}^2 = -\hat{W}_r\hat{W}_r$ であることより，$-J(J+1)$ と定まるので，固有値方程式

$$\hat{W}^2|F\rangle = -J(J+1)|F\rangle\,, \quad J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \tag{4.8.26}$$

が得られる．

量子力学に移行して正準変数を対応する演算子におきかえたとき，式 (4.8.9) に対応する演算子が量子論において成り立つことが期待される．このような演算子を $|F\rangle$ に作用させると，

$$\hat{W}^2|F\rangle = \frac{k^2}{M^2}\left(2\hat{\Pi}\hat{\bar{\Pi}} - m^2\right)|F\rangle \tag{4.8.27}$$

が得られる．この式はワイル順序がとられていて，その後，交換関係を用いて簡単な形に書き換えられている．式 (4.8.27) は，式 (4.5.4e) と式 (4.5.4f) を用いると，

$$\hat{W}^2|F\rangle = \frac{k^2}{M^2}\left(M^2 - m^2\right)|F\rangle \tag{4.8.28}$$

となる．式 (4.8.28) と式 (4.8.26) を用いると，M は

$$M_J := \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{J(J+1)}{k^2}}} \tag{4.8.29}$$

と定まる．これは，粒子の質量公式にほかならない．式 (4.8.29) に応じて，正の定数 γ は，式 (4.3.12) から，

$$\gamma_{J,\pm} := \left(\sqrt{1+\frac{J(J+1)}{k^2}} \pm \sqrt{\frac{J(J+1)}{k^2}}\right)^2 \tag{4.8.30}$$

と定まる．

次に，式 (4.8.15) に対応するワイル順序がとられた演算子を考える．この演算子を $|F\rangle$ に作用させて交換関係を用いると，

$$\hat{W}^2|F\rangle = -\frac{2}{M^2}\hat{T}^2\hat{\Pi}\hat{\bar{\Pi}}|F\rangle\,, \quad \hat{T}^2 := \hat{T}_r\hat{T}_r \tag{4.8.31}$$

が得られる．式 (4.8.31) は，式 (4.5.4e) と式 (4.5.4f) を用いると，

$$\hat{W}^2|F\rangle = -\hat{T}^2|F\rangle \tag{4.8.32}$$

となる．演算子 $\hat{T}^2$ は，$\hat{W}^2$ と式 (4.8.25) における各演算子と可換である．このことは，物理的状態 $|F\rangle$ が $\hat{T}^2$ と他の演算子に対する同時固有状態として採用されることを意味している．また，演算子 $\hat{T}^2$ は $SU(2)$ に関するリー代数のカシミア演算子であるので，$|F\rangle$ は，適切な条件のもとで固有値方程式

$$\hat{T}^2|F\rangle = I(I+1)|F\rangle\,, \quad I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \tag{4.8.33}$$

を満たしていることがわかる．式 (4.8.33)，式 (4.8.26)，式 (4.8.32) を用いると，次の式が導かれる:

$$I = J\,. \tag{4.8.34}$$

4.8.2　式 (4.6.15) の証明

ここでは，式 (4.6.15) の証明を与える．

まず，交換関係 (4.5.2a) と (4.5.2b) は，$\hat{Z}_i^A$ と $\hat{\bar{Z}}_A^i$ のスピナー成分を用いると，

$$\left[\hat{\omega}_i^\alpha, \hat{\bar{\pi}}_\beta^j\right] = \delta_i^j\delta_\beta^\alpha\,, \quad \left[\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}}, \hat{\bar{\omega}}^{j\dot{\beta}}\right] = \delta_i^j\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{4.8.35}$$

と表すことができる．スピナー変数の間のその他の交換関係は 0 である．いま，式 (4.6.27) における $\langle\breve{Z}|$ の代わりに，次のブラベクターを考える:

$$\langle\bar{\pi}, \pi| := \langle\tilde{0}|\exp\left(\bar{\pi}_\alpha^i\hat{\omega}_i^\alpha - \pi_{i\dot{\alpha}}\hat{\bar{\omega}}^{i\dot{\alpha}}\right). \tag{4.8.36}$$

ただし，$\langle\tilde{0}|$ は $\langle\tilde{0}|\hat{\bar{\pi}}^i_\alpha = \langle\tilde{0}|\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}} = 0$ を満たしている．式 (4.8.36) と交換関係 (4.8.35) を用いると，次の式を示すことができる:

$$\langle\bar{\pi},\pi|\hat{\bar{\pi}}^i_\alpha = \bar{\pi}^i_\alpha\langle\bar{\pi},\pi|\,, \quad \langle\bar{\pi},\pi|\hat{\pi}_{i\dot{\alpha}} = \pi_{i\dot{\alpha}}\langle\bar{\pi},\pi|\,, \tag{4.8.37a}$$

$$\langle\bar{\pi},\pi|\hat{\omega}^\alpha_i = \frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\langle\bar{\pi},\pi|\,, \quad \langle\bar{\pi},\pi|\hat{\bar{\omega}}^{i\dot{\beta}} = -\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}}\langle\bar{\pi},\pi|\,. \tag{4.8.37b}$$

命題 1 いま，G_1 と G_2 は，区分的に滑らかな $\bar{\pi}^i_\alpha$ と $\pi_{i\dot{\alpha}}$ の関数である．また，$|G_2\rangle$ は $G_2(\bar{\pi},\pi) = \langle\bar{\pi},\pi|G_2\rangle$ を満たすケットベクターである．さらに，$\vec{T}^2 := \vec{T}_r\vec{T}_r$ は，微分演算子

$$\vec{T}_r := \frac{1}{2}\left(\bar{\pi}^k_\beta\sigma_{rk}{}^l\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^l_\beta} - \pi_{l\dot{\beta}}\sigma_{rk}{}^l\frac{\partial}{\partial\pi_{k\dot{\beta}}}\right) \tag{4.8.38}$$

を用いて定められたときの $\hat{T}^2$ の表示である．このとき，

$$\int_{\mathbb{C}^4} G_1(\bar{\pi},\pi)\langle\bar{\pi},\pi|\hat{T}^2|G_2\rangle d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi = \int_{\mathbb{C}^4}\left\{\vec{T}^2 G_1(\bar{\pi},\pi)\right\}G_2(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi \tag{4.8.39}$$

が成り立つ．ただし，両辺の積分は有限になるとする．ここで，$d^4\bar{\pi} := d\bar{\pi}^1_0\wedge d\bar{\pi}^1_1\wedge d\bar{\pi}^2_0\wedge d\bar{\pi}^2_1$，$d^4\pi := d\pi_{1\dot{0}}\wedge d\pi_{1\dot{1}}\wedge d\pi_{2\dot{0}}\wedge d\pi_{2\dot{1}}$ である．

証明 式 (4.8.17) は

$$\hat{T}_r = \frac{1}{2}\left(\hat{\bar{\pi}}^k_\beta\sigma_{rk}{}^l\hat{\omega}^\beta_l + \hat{\bar{\omega}}^{k\dot{\beta}}\sigma_{rk}{}^l\hat{\pi}_{l\dot{\beta}}\right) \tag{4.8.40}$$

と書き換えられる．この $\hat{T}_r$ を右から $\langle\bar{\pi},\pi|$ に作用し，式 (4.8.37) とパウリ行列がトレースレス $\sigma_{rk}{}^k = 0$ であることを用いると，$\langle\bar{\pi},\pi|\hat{T}_r = \vec{T}_r\langle\bar{\pi},\pi|$ を示すことができる．この式を式 (4.8.39) の左辺に 2 回適用すると，

$$\int_{\mathbb{C}^4} G_1(\bar{\pi},\pi)\langle\bar{\pi},\pi|\hat{T}^2|G_2\rangle d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi = \int_{\mathbb{C}^4} G_1(\bar{\pi},\pi)\vec{T}^2_r G_2(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi \tag{4.8.41}$$

が得られる．式 (4.8.41) の右辺に 2 回部分積分を実行し，$\sigma_{rk}{}^k = 0$ が成り立つことを用いると，式 (4.8.41) の右辺は次のようになる:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^4} G_1(\bar{\pi},\pi)\vec{T}^2_r G_2(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi &= -\int_{\mathbb{C}^4}\left\{\vec{T}_r G_1(\bar{\pi},\pi)\right\}\vec{T}_r G_2(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi \\ &= \int_{\mathbb{C}^4}\left\{\vec{T}^2 G_1(\bar{\pi},\pi)\right\}G_2(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi\,.\end{aligned} \tag{4.8.42}$$

この式を導く際に，部分積分を行うことで現れる表面項は，式 (4.8.39) の両辺の積分が有限であるという仮定より，消去した．式 (4.8.42) と式 (4.8.41) を組み合わせると，式 (4.8.39) が導かれる． 証明終

さて，次の式を考える:

$$\Omega^{i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(z) := \int_{\mathbb{C}^4} \langle\bar{\pi},\pi|\hat{\mathcal{P}}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\hat{T}^2|F\rangle E(z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi\,. \tag{4.8.43}$$

ここで，$z^{\alpha\dot{\alpha}}\,(=x^{\alpha\dot{\alpha}}-y^{\alpha\dot{\alpha}})$ は複素ミンコフスキー空間上の座標変数，E は $z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}}$ の関数である．また，$\hat{\mathcal{P}}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}$ は式 (4.6.35) で定義された演算子である．さらに，$x^{\alpha\dot{\alpha}}$ ではなく $z^{\alpha\dot{\alpha}}$ が採用されているのは，$z^{\alpha\dot{\alpha}}$ が有限な積分を定義するのに有効な座標変数だからである．式 (4.8.43) に式 (4.8.37a) を繰り返し用いると，式 (4.8.43) は次のように書くことができる:

$$\Omega^{i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(z) = \int_{\mathbb{C}^4} \mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi)E(z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})\langle\bar{\pi},\pi|\hat{T}^2|F\rangle d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi\,. \tag{4.8.44}$$

ここで，$\mathcal{P}^{(S)}$ を

$$\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi) := \frac{1}{N_+!}\sum_{\varsigma}\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+1)}j_1}\cdots\epsilon^{i_{\varsigma(p+l+q)}j_q}\mathcal{P}^{i_{\varsigma(1)}\dots i_{\varsigma(p+l)}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi) \tag{4.8.45}$$

と定義し，

$$\mathcal{P}^{i_1\dots i_{p+l}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,j_1\dots j_q,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi) := (-1)^{p+l}\pi_{j_1\dot{\alpha}_1}\cdots\pi_{j_q\dot{\alpha}_q}\bar{\pi}^{i_1}_{\alpha_1}\cdots\bar{\pi}^{i_{p+l}}_{\alpha_{p+l}} \tag{4.8.46}$$

を定義した．いま，命題 1 において $G_1=\mathcal{P}^{(S)}$, $|G_1\rangle=|F\rangle$ とした場合を考える．すると，式 (4.8.39) から

$$\Omega^{i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(z)=\int_{\mathbb{C}^4}\left\{\vec{T}^2\left(\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi)E(z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})\right)\right\}\tilde{F}(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi \tag{4.8.47}$$

が導かれる．ここで，$\tilde{F}(\bar{\pi},\pi):=\langle\bar{\pi},\pi|F\rangle$ である．関数 $\tilde{F}$ と E は区分的に滑らかな関数であるとする．また，式 (4.8.47) と式 (4.8.44) の積分は有限であるとする．このとき，式 (4.8.47) は，$\vec{T}_rE(z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})=0$ が成り立つことを用いると，

$$\Omega^{i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(z) = \int_{\mathbb{C}^4}\left\{\vec{T}^2\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi)\right\}E(z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})\tilde{F}(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi \tag{4.8.48}$$

となる．

命題 2 固有値方程式

$$\vec{T}^2\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = \frac{N_+}{2}\left(\frac{N_+}{2}+1\right)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} \tag{4.8.49}$$

が成り立つ．ここで，$N_+ := p+l+q$ である．

証明 式 (4.8.38) と公式 (4.8.12) を用いると，次の式を示すことができる:

$$\begin{aligned}\vec{T}^2 = \frac{1}{4}\bigg(&3\bar{\pi}^i_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha} + 2\bar{\pi}^i_\alpha\bar{\pi}^j_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\beta} - \bar{\pi}^i_\alpha\bar{\pi}^j_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\beta}\\ &- 4\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\alpha}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}} + 2\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}}\\ &+ 3\pi_{i\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}} + 2\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\beta}}} - \pi_{i\dot{\alpha}}\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}}\bigg)\,.\end{aligned} \tag{4.8.50}$$

また，次の式が求まる:

$$\bar{\pi}^i_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = (p+l)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} \tag{4.8.51a}$$

$$\bar{\pi}^i_\alpha\bar{\pi}^j_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\beta}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = (p+l)(p+l-1)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.8.51b}$$

$$\bar{\pi}^i_\alpha\bar{\pi}^j_\beta\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\beta}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = (p+l)(p+l-1)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.8.51c}$$

$$\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^j_\alpha}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = 0\,, \tag{4.8.51d}$$

$$\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\pi}^i_\alpha}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = (p+l)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.8.51e}$$

$$\pi_{i\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = q\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.8.51f}$$

$$\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\beta}}}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = q(q-1)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,, \tag{4.8.51g}$$

$$\pi_{i\dot{\alpha}}\pi_{j\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\pi_{i\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\pi_{j\dot{\beta}}}\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q} = q(q-1)\mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}\,. \tag{4.8.51h}$$

式 (4.8.51) と式 (4.8.50) を組み合わせると，式 (4.8.49) が導かれる． 証明終

式 (4.8.44) に式 (4.8.33) を用いて，式 (4.8.48) に式 (4.8.51) を用いれば，

$$\left\{I(I+1)-\frac{N_+}{2}\left(\frac{N_+}{2}+1\right)\right\} \times \int_{\mathbb{C}^4} \mathcal{P}^{(S)i_1\dots i_{p+l+q}}_{\alpha_1\dots\alpha_{p+l}\,;\,\dot{\alpha}_1\dots\dot{\alpha}_q}(\bar{\pi},\pi)E(Z^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\pi}^i_\alpha\pi_{i\dot{\alpha}})\tilde{F}(\bar{\pi},\pi)d^4\bar{\pi}\wedge d^4\pi = 0 \tag{4.8.52}$$

が得られる．いま，関数 E は，区分的に滑らかである限り完全に任意の関数で，式 (4.8.52) の積分を有限にするために導入した関数である．このことと式 (4.8.52) から，$I=\frac{1}{2}N_+$ が成り立つこととことがわかる．さらに，この式と式 (4.8.34) を比較すれば，

$$J=\frac{N_+}{2} \tag{4.8.53}$$

が求まる．以上から，式 (4.6.15) が証明された．

第5章　ローレンツ・ディラック方程式のラグランジュ形式

前章において，外曲率を含むラグランジアンを基本とする剛性を持つ有質量粒子模型を考察したが，他にも，外曲率の2乗を含むラグランジアンを基本とする剛性を持つ粒子模型がある．この章では，外曲率の2乗を基本とする剛性を持つ粒子模型を変形することにより，ローレンツ・ディラック方程式 (放射反作用を受ける荷電粒子の運動方程式) を与える2種類のラグランジアンを構成する．これらのうちの1つには減衰項が含まれていて，他の1つには交差項が含まれている．このような2つのラグランジアンから，ローレンツ・ディラック方程式がオイラー・ラグランジュ方程式として得られることを別々に示す．

5.1　導入

荷電粒子は，電磁波を放射すると，自身が電磁波を放射することによる反作用を受ける．この現象は，放射反作用としてよく知られている [85–90]．この放射反作用の効果は，19世紀末に Lorentz によってはじめて評価された [91]．さらに，放射反作用の効果を取り入れた古典的電子模型が Abraham と Lorentz によって考察された [92,93]．放射反作用を受ける荷電粒子に対する非相対論的な運動方程式は，荷電粒子の位置座標を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ とすると，次のように与えられる[1]:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{F} + \frac{2}{3}e^2\frac{d^3\boldsymbol{x}}{dt^3}\,. \tag{5.1.1}$$

ここで，m と e はそれぞれ，荷電粒子の質量と電荷である．また，$\boldsymbol{F}$ は外部電磁場によるローレンツ力を表している．式 (5.1.1) はローレンツ・アブラハム方程式 (もしくは，アブラハム・ローレンツ方程式) と呼ばれている．その後，1938年に，Dirac は放射反作用の効果を相対論的に扱うことで，ローレンツ・アブラハム方程

[1] 本論文では，自然単位系を採用しているので，光速度 c は $c = 1$ である．

式を相対論的に共変な形式に書き換えた [25]．この方程式はローレンツ・ディラック方程式と呼ばれている [87,90,94–96]．ローレンツ・ディラック方程式は，4 次元ミンコフスキー空間上を運動する荷電粒子の時空座標を $x^\mu = x^\mu(l)\,(\mu = 0, 1, 2, 3)$ とすると，次のように与えられる:

$$m\frac{du^\mu}{dl} = eF^{\mu\nu}(x)u_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\delta^\mu_\nu - u^\mu u_\nu\right)\frac{d^2u^\nu}{dl^2}\,. \tag{5.1.2}$$

ここで，$u^\mu := dx^\mu/dl$ であり，l は粒子の固有時，すなわち粒子が描く世界線の長さである．また，u^μ は，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ が $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ と採用されているので，$u_\mu u^\mu = \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$ を満たしている．さらに，$F^{\mu\nu}$ は外部電磁場を表している．式 (5.1.1) と式 (5.1.2) は位置座標の 3 階微分を含む特殊な運動方程式である．このことに応じて，これらの方程式には，外部電磁場が存在しないにもかかわらず荷電粒子の加速度が無限に増加する暴走解や，外部電磁場による影響を受ける前から加速してしまう先行加速解など，物理的に不自然な解を与える問題がある [85,86,88–90,95–97]．これらの問題を解決するために，様々な考えが最近まで提案されてきた [85,90,96–104]．しかしながら，これらの問題への根本的な解決策はまだ与えられていない．

放射反作用を受ける荷電粒子の運動方程式 (5.1.1) と (5.1.2) が得られたので，これらの方程式を与えるラグランジアンを構成することは，放射反作用を受ける荷電粒子の解析力学と量子力学を議論する上で非常に重要である．また，このようなラグランジアンを見出すことができれば，上述の問題を取り扱うための新しい見解が得られることも期待できる．実際に，方程式 (5.1.1) と (5.1.2) を与えるラグランジアンを構成する研究がいままでにいくつか行われている [105–107]．この中で，Carati は，補助変数を用いて式 (5.1.1) を与えるあらわに時間依存するラグランジアンを構成した [105].（さらに，Carati は特殊な場合でのこのラグランジアンの相対論的な拡張も考察した.）また，Barone と Mendes は，方程式 (5.1.1) とそれを時間反転した方程式を同時に与えるあらわに時間依存しないラグランジアンを構成した [106]．Carati によるラグランジアンは減衰調和振動子の直接的なラグランジュ形式を基に構成され [108–110]，一方，Barone と Mendes によるラグランジアンは減衰調和振動子の間接的なラグランジュ形式を基に構成されている [111–113] [2]．ここで，Carati や Barone と Mendes の議論では，外部電磁場によるローレンツ

[2]直接的なラグランジュ形式では，減衰調和振動子の運動方程式を与えるラグランジアンとしてあらわに時間依存するラグランジアンが与えられ [108–110]，一方，間接的なラグランジュ形式では，減衰調和振動子の運動方程式とそれを時間反転した方程式を同時に与えるラグランジアンとしてあらわに時間依存しないラグランジアンが与えられている [111–113].

力 $\boldsymbol{F}$ が粒子の速度 $\boldsymbol{v} := d\boldsymbol{x}/dt$ と独立に与えられていることを指摘しておく．したがって，Carati や Barone と Mendes が与えたラグランジアンは，磁場が 0 のときか，磁場が速度 $\boldsymbol{v}$ に平行なときの荷電粒子だけを記述できることになる[3]．

本研究では，点粒子が描く世界線の外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子のラグランジアン [17, 18, 21] を変形し，それに外部電磁場との結合項を付加することで，ローレンツ・ディラック方程式 (5.1.2) を与える相対論的なラグランジアンを 2 種類，構成する．この 2 種類のラグランジアンには時空座標 x^μ だけでなく補助変数も含まれているので，これらは Kupriyanov の証明 [107] の適用範囲外になる．また，2 種類のラグランジアンから定まる作用積分はそれぞれ，点粒子が描く世界線上のパラメーターの付け替えのもとで不変であるように構成される．さらに，2 種類のラグランジアンのうちの 1 つには指数関数的に減衰する固有時 l の関数，すなわち減衰項が含まれている．一方，もう 1 つのラグランジアンには異なる 2 つの補助変数から成る交差項が含まれている．本研究で与えるラグランジアンは Carati や Barone と Mendes によるラグランジアンの直接的な拡張ではないことを指摘しておく．

本章は次のように構成されている: 第 5.2 節では，ローレンツ・ディラック方程式を与えるラグランジアンを構成するのに先立ち，外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子のラグランジアンからその運動方程式を導く．その後，この運動方程式は，ローレンツ・ディラック方程式と共通した項を持つことを確かめる．第 5.3 節では，本章を考察するうえで必要な力学変数を与え，その力学変数が従う世界線上のパラメーターの付け替えのもとでの変換則を定義する．第 5.4 節では，前節で定義した力学変数を用いて，減衰項を含むラグランジアンを与える．また，そのラグランジアンからソース項を持つローレンツ・ディラック方程式が得られることを実際に示す．第 5.5 節では，減衰項の代わりに交差項を含むラグランジアンを与えて，そのラグランジアンからもまたソース項を持つローレンツ・ディラック方程式が得られることを実際に示す．第 5.6 節では，本章のまとめを行い，今後の課題を述べる．第 5.7 節では補足として，世界線上のパラメーターを用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式を与える．

---

[3] 文献 [107] において，Kupriyanov は方程式 (5.1.1) と (5.1.2) を与えるラグランジアンを構成できるか否かを調べて，そのようなラグランジアンを構成することができないことを証明した．しかしながら，Kupriyanov による証明は，座標変数 $\boldsymbol{x}$ と x^μ やそれらの 1 階微分と 2 階微分のみを含むラグランジアンにだけ適用される．したがって，他の力学変数も含むような Carati や Barone と Mendes が与えたラグランジアンは，Kupriyanov の証明の適用範囲外にある．

5.2　剛性を持つ粒子の運動方程式

この節では，外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子のラグランジアンを与え，そのラグランジアンから運動方程式を導く．また，この運動方程式には，ローレンツ・ディラック方程式と共通した項がみられることを確かめる．

剛性を持つ粒子模型は，1986 年に，Pisarski によって提案された [7]．この模型を定める作用積分は，点粒子が描く世界線の外曲率を基に構成される．実際に，世界線の外曲率を $K=K(l)$ とすれば，一般的な剛性を持つ粒子の作用積分は

$$\mathcal{S}=\int_{l_0}^{l_1} dl\,(-m-kK^{\gamma}) \tag{5.2.1}$$

と与えられる．ここで，l は点粒子が描く世界線の弧長パラメーター，m は質量次元を持つパラメーター，k,γ は実定数である．(Pisarski が提唱した作用積分は，式 (5.2.1) において $\gamma=1$ としたものである．)

いま，4 次元ミンコフスキー空間上の粒子の時空座標を $x^{\mu}=x^{\mu}(\tau)$ $(\mu=0,1,2,3)$ とする．また，ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ は $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ である．ここで，$\tau\,(\tau_0\leq\tau\leq\tau_1)$ は粒子が描く世界線に沿った任意のパラメーターであり，$dx^0/d\tau>0$ とする．パラメーター τ を用いると，世界線の長さの無限小量 dl と世界線の外曲率 K はそれぞれ，

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2}d\tau\,,\quad K=\sqrt{-\frac{\ddot{x}_{\perp}^2}{(\dot{x}^2)^2}} \tag{5.2.2}$$

と表せる．ただし，$\dot{x}^2>0$ とし，このとき $\ddot{x}_{\perp}^2\leq 0$ が成り立つことを考慮した (付録 3.7.1 参照)．また，

$$\ddot{x}_{\perp}^{\mu}:=\ddot{x}^{\mu}-\dot{x}^{\mu}\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \tag{5.2.3}$$

であり，$\dot{x}^{\mu}:=dx^{\mu}/d\tau$, $\ddot{x}^{\mu}:=d^2x^{\mu}/d\tau^2$, $\dot{x}^2:=\dot{x}_{\mu}\dot{x}^{\mu}$, $\ddot{x}^2:=\ddot{x}_{\mu}\ddot{x}^{\mu}$, $\dot{x}\ddot{x}:=\dot{x}_{\mu}\ddot{x}^{\mu}$ である．式 (5.2.2) を式 (5.2.1) に代入し，$m\neq 0$ として $\gamma=2$ とおくと，

$$S=\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L\,, \tag{5.2.4}$$

$$L:=-m\sqrt{\dot{x}^2}+\frac{k}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{\ddot{x}_{\perp}^2}{\dot{x}^2} \tag{5.2.5}$$

が得られる．このとき，実定数 k は質量次元 1 を持つ．式 (5.2.5) のような外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子のラグランジアンも研究されている [17, 18, 21]．

ラグランジアン (5.2.5) から運動方程式を導くために，補助変数 $q^\mu = q^\mu(\tau)$ と $\lambda_\mu = \lambda_\mu(\tau)$ を導入し，ラグランジアン (5.2.5) を

$$L = -m\sqrt{q^2} + \frac{k}{\sqrt{q^2}}\frac{\dot{q}_\perp^2}{q^2} + \lambda_\mu(q^\mu - \dot{x}^\mu) \tag{5.2.6}$$

と書き換える．ここで，

$$\dot{q}_\perp^\mu := \dot{q}^\mu - q^\mu \frac{q\dot{q}}{q^2} \tag{5.2.7}$$

であり，$\dot{q}^\mu := dq^\mu/d\tau$, $q^2 := q_\mu q^\mu$, $q\dot{q} := q_\mu \dot{q}^\mu$ である．まず，x^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は次のようになる:

$$\frac{d}{d\tau}\lambda_\mu = 0\,. \tag{5.2.8}$$

次に，q^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求める．いま，次の式が計算できる:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\mu} = -m\frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} - k\left[\frac{3\dot{q}_\perp^2}{(q^2)^2\sqrt{q^2}}q^\mu + \frac{2(\dot{q}q)}{(q^2)^2\sqrt{q^2}}\dot{q}_\perp^\mu\right] + \lambda^\mu\,, \tag{5.2.9a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 2k\frac{\dot{q}_\perp^\mu}{q^2\sqrt{q^2}}\,, \tag{5.2.9b}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} = 2k\left[\frac{1}{q^2\sqrt{q^2}}\left(\ddot{q}_\perp^\mu - \frac{\dot{q}_\perp^2}{q^2}q^\mu\right) - \frac{4(\dot{q}q)}{(q^2)^2\sqrt{q^2}}\dot{q}_\perp^\mu\right]. \tag{5.2.9c}$$

ここで，

$$\ddot{q}_\perp^\mu := \ddot{q}^\mu - q^\mu\frac{q\ddot{q}}{q^2} \tag{5.2.10}$$

であり，$\ddot{q}^\mu := d^2q^\mu/d\tau^2$, $q\ddot{q} := q_\mu\ddot{q}^\mu$ である．式 (5.2.9) を用いると，q_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$m\frac{q^\mu}{\sqrt{q^2}} = -\frac{2k}{(q^2)^2\sqrt{q^2}}\left(q^2\ddot{q}_\perp^\mu - 3(\dot{q}q)\dot{q}_\perp^\mu + \frac{1}{2}\dot{q}_\perp^2 q^\mu\right) + \lambda^\mu \tag{5.2.11}$$

と求まる．また，λ_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$q^\mu - \dot{x}^\mu = 0 \tag{5.2.12}$$

と得られる．式 (5.2.12) を式 (5.2.11) に代入すると，式 (5.2.11) は

$$m\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = -\frac{2k}{\sqrt{\dot{x}^2}}\left(\frac{\dddot{x}_\perp^\mu}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}_\perp^\mu}{(\dot{x}^2)^2} + \frac{\ddot{x}_\perp^2\dot{x}^\mu}{2(\dot{x}^2)^2}\right) + \lambda^\mu \tag{5.2.13}$$

となる．ここで，

$$\dddot{x}^{\mu}_{\perp} := \dddot{x}^{\mu} - \dot{x}^{\mu}\frac{\dot{x}\dddot{x}}{\dot{x}^2} \tag{5.2.14}$$

であり，$\dddot{x}^{\mu} := d^3x^{\mu}/d\tau^3$, $\dot{x}\dddot{x} := \dot{x}_{\mu}\dddot{x}^{\mu}$ である．式 (5.2.13) は外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子の運動方程式である．

第 5.7.1 項より，世界線上のパラメーターを用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式は

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}^2}} = eF^{\mu\nu}(x)\dot{x}_{\nu} + \frac{2}{3}e^2\left(\frac{\dddot{x}^{\mu}_{\perp}}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^{\mu}_{\perp}}{(\dot{x}^2)^2}\right) \tag{5.2.15}$$

と与えられる (式 (5.7.8) 参照)．この式と剛性を持つ粒子の運動方程式 (5.2.13) を比較すると，この 2 つの方程式には，互いに共通した項 $\dddot{x}^{\mu}_{\perp}/\dot{x}^2 - 3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^{\mu}_{\perp}/(\dot{x}^2)^2$ がみられる．この項が運動方程式 (5.2.13) に現れるのは，式 (5.2.9c) からわかるように，ラグランジアン (5.2.6) が $\dot{q}^2_{\perp}/q^2$ を含むことに由来する．このことを考慮し，第 5.4 節と第 5.5 節では，剛性を持つ粒子のラグランジアン (5.2.6) を変形し，それに外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える相対論的なラグランジアンを実際に構成する．

5.3　力学変数とその変換則

この節では，ローレンツ・ディラック方程式を与えるラグランジアンを実際に構成する上で必要になる力学変数を与え，その力学変数が従う世界線上のパラメーターの付け替えのもとでの変換則を定義する．

はじめに，4 次元ミンコフスキー空間上の荷電粒子の時空座標を $x^{\mu} = x^{\mu}(\tau)$ とする．時空座標 x^{μ} は 1 次元パラメーター空間 $\mathcal{T} := \{\tau \,|\, \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1\}$ 上の実スカラー場であるので，パラメーター τ の付け替え

$$\tau \to \tau' = \tau'(\tau) \quad \left(\frac{d\tau'}{d\tau} > 0\right) \tag{5.3.1}$$

のもとでの x^{μ} の変換は

$$x^{\mu}(\tau) \to x'^{\mu}(\tau') = x^{\mu}(\tau) \tag{5.3.2}$$

と与えられる．

さらに，時空座標 x^μ のほかに，補助変数 $q_i^\mu = q_i^\mu(\tau)$, $\lambda_{i\mu} = \lambda_{i\mu}(\tau)$ $(i = 1, 2)$, $\xi_\mu = \xi_\mu(\tau)$ を導入する．これらの補助変数が従うパラメーターの付け替えのもとでの変換則はそれぞれ，次のように与えられるとする:

$$q_i^\mu(\tau) \to q_i'^\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} q_i^\mu(\tau)\,, \tag{5.3.3}$$

$$\lambda_{i\mu}(\tau) \to \lambda'_{i\mu}(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} \lambda_{i\mu}(\tau)\,, \tag{5.3.4}$$

$$\xi_\mu(\tau) \to \xi'_\mu(\tau') = \frac{d\tau}{d\tau'} \xi_\mu(\tau)\,. \tag{5.3.5}$$

この式は，補助変数 $q_i^\mu = q_i^\mu(\tau)$, $\lambda_{i\mu} = \lambda_{i\mu}(\tau)$, $\xi_\mu = \xi_\mu(\tau)$ が $\mathcal{T}$ 上のウェイト 1 を持つスカラー密度場としての役割を果たしていることを示している．さて，4 元ベクター $(\dot{q}_i^\mu)$ の (q_i^μ) に垂直な成分は

$$\dot{q}_{i\perp}^\mu := \dot{q}_i^\mu - q_i^\mu \frac{q_i \dot{q}_i}{q_i^2} \tag{5.3.6}$$

と与えられる．ここで，$\dot{q}_i^\mu := dq_i^\mu/d\tau$，$q_i^2 := q_{i\mu} q_i^\mu$，$q_i \dot{q}_i := q_{i\mu} \dot{q}_i^\mu$ である (添字 i については和をとらない)．式 (5.3.6) と式 (5.3.3) を用いると，パラメーターの付け替えのもとでの $\dot{q}_{i\perp}^\mu$ の変換は

$$\dot{q}_{i\perp}^\mu(\tau) \to \dot{q}_{i\perp}'^\mu(\tau') = \left(\frac{d\tau}{d\tau'}\right)^2 \dot{q}_{i\perp}^\mu(\tau) \tag{5.3.7}$$

と求まる．式 (5.3.7) から，$\dot{q}_{i\perp}^\mu$ の変換は，$\dot{q}_i^\mu$ の変換と異なり，一次変換になることがわかる．また式 (5.3.7) は，$\dot{q}_{i\perp}^\mu$ が $\mathcal{T}$ 上のウェイト 2 を持つスカラー密度場の役割を果たしていることを意味している．

5.4 減衰項を持つラグランジアン

この節では，第 5.2 節での議論を考慮し，第 5.3 節で導入した力学変数を用いて，ローレンツ・ディラック方程式を与えるラグランジアンを構成する．その後，実際にそのラグランジアンからローレンツ・ディラック方程式が導かれることを示す．

力学変数として $x^\mu, q_i^\mu, \lambda_{i\mu}, \xi_\mu$ を採用し，次のラグランジアンを与える:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{D}} = \frac{e^{-kl}}{(q_1^2 q_2^2)^{1/4}} \Bigg[&\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_{1\perp}^2}{q_1^2} - \frac{\dot{q}_{2\perp}^2}{q_2^2}\right) \\ &- \lambda_{1\mu}\left(q_1^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \lambda_{2\mu}\left(q_2^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \xi_\mu\left(q_1^\mu - q_2^\mu\right) - \frac{3}{2e} F_{\mu\nu}(x) q_1^\mu q_2^\nu \Bigg]\,. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

ここで，$k := 3m/2e^2$，$\dot{q}_{i\perp}^2 := \dot{q}_{i\perp\mu}\dot{q}_{i\perp}^{\mu}$ である．また，$F_{\mu\nu}(= -F_{\nu\mu})$ は外部電磁場を表している．ラグランジアン (5.4.1) には，第 5.2 節での議論が考慮され，$\dot{q}_{i\perp}^2/q_i^2$ が含まれている．式 (5.4.1) における固有時 l は τ の関数として

$$l(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tilde{\tau}\sqrt{\dot{x}_\mu(\tilde{\tau})\dot{x}^\mu(\tilde{\tau})} \tag{5.4.2}$$

と表すことができる．この式の $x^\mu(\tilde{\tau})$ は，後で得られる x^μ に関する運動方程式の解である．したがって，$x^\mu(\tilde{\tau})$ は，作用積分

$$S_{\mathrm{D}} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L_{\mathrm{D}} \tag{5.4.3}$$

の変分に対して変化するような力学変数ではない．いま，ラグランジアン L_{D} は減衰因子 e^{-kl} を通してパラメーター τ にあらわに依存している．固有時 l は幾何学的には粒子が描く世界線の長さを表しているので，l はパラメーターの付け替えのもとで不変である[4]．このことと変換則 (5.3.2)，(5.3.3)，(5.3.4)，(5.3.5)，(5.3.7) を用いると，作用積分 S_{D} はパラメーターの付け替えのもとで不変であることを示すことができる．また，ラグランジアン L_{D} はゲージ変換

$$\lambda_{1\mu} \to \lambda'_{1\mu} = \lambda_{1\mu} + \theta_\mu\,, \quad \lambda_{2\mu} \to \lambda'_{2\mu} = \lambda_{2\mu} + \theta_\mu\,, \quad \xi_\mu \to \xi'_\mu = \xi_\mu + \theta_\mu \tag{5.4.4}$$

のもとで不変であることを示すことができる．ここで，$\theta_\mu = \theta_\mu(\tau)$ は実ゲージ関数である．さらに，ラグランジアン L_{D} は

$$L_{\mathrm{D}}\left(q_1^\mu, \dot{q}_1^\mu, \lambda_{1\mu}; q_2^\mu, \dot{q}_2^\mu, \lambda_{2\mu}\right) = -L_{\mathrm{D}}\left(q_2^\mu, \dot{q}_2^\mu, \lambda_{2\mu}; q_1^\mu, \dot{q}_1^\mu, \lambda_{1\mu}\right) \tag{5.4.5}$$

という反対称性を持つ関数である．

ラグランジアン L_{D} の各力学変数に関するオイラー・ラグランジュ方程式を導出するために

$$K_i := \frac{\dot{q}_{i\perp}^2}{q_i^2} = \frac{q_i^2\dot{q}_i^2 - (q_i\dot{q}_i)^2}{\left(q_i^2\right)^2} \tag{5.4.6}$$

を定義し，ラグランジアン (5.4.1) を

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{D}} = \frac{e^{-kl}}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\Bigg[&\frac{1}{2}\left(K_1 - K_2\right) \\ &- \lambda_{1\mu}\left(q_1^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \lambda_{2\mu}\left(q_2^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \xi_\mu\left(q_1^\mu - q_2^\mu\right) - \frac{3}{2e}F_{\mu\nu}(x)q_1^\mu q_2^\nu\Bigg] \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

[4] 固有時 $l(\tau)$ は，厳密には τ だけでなく τ_0 と x^μ の関数であり，$l(\tau, \tau_0; x^\mu)$ と表すべきである．したがって，$l(\tau)$ のパラメーターの付け替えのもとでの不変性は，正確に書くと，次のようになる: $l(\tau', \tau'_0; x'^\mu) = l(\tau, \tau_0; x^\mu)$.

と書き換える．まず，x^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式を求める．先に述べたように，固有時 $l(\tau)$ の中に含まれている $x^\mu(\tilde{\tau})$ は変分に対して変化するような力学変数ではないので，$l(\tau)$ は変分に対して不変である．このことに注意すると，x^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{e^{-kl}}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\left(\lambda_{1\mu}-\lambda_{2\mu}\right)\right]+\frac{3e^{-kl}}{2e\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\partial_\mu F_{\nu\rho}(x) q_1^\nu q_2^\rho=0 \tag{5.4.8}$$

と求まる．式 (5.4.8) にはラグランジアン L_{D} が持つゲージ不変性に伴って，ゲージ不変な量 $\lambda_{1\mu}-\lambda_{2\mu}$ が含まれている．このため，$\lambda_{1\mu}$ と $\lambda_{2\mu}$ は一意的に定まらない．次に，q_1^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{-kl}}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu}-\frac{\partial K_1}{\partial q_1^\mu}\right)+\lambda_{1\mu}-\xi_\mu+\frac{3}{2e}F_{\mu\nu}(x) q_2^\nu\right] \\
&\quad+\left(\frac{d}{d\tau}\frac{e^{-kl}}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu}+\frac{q_{1\mu}}{2q_1^2}L_{\mathrm{D}}=0
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

となる．式 (5.4.9) を部分ごとに計算すると次の式が得られる:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu}=\frac{\dot{q}_{1\perp\mu}}{q_1^2}=\frac{1}{\sqrt{q_1^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{q_{1\mu}}{\sqrt{q_1^2}}\,, \tag{5.4.10}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu}-\frac{\partial K_1}{\partial q_1^\mu}=\frac{2}{q_1^2}\left(\ddot{q}_{1\perp\mu}-\frac{2q_1\dot{q}_1}{q_1^2}\dot{q}_{1\perp\mu}\right)\,, \tag{5.4.11}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}=-\frac{1}{2\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\left(\frac{q_1\dot{q}_1}{q_1^2}+\frac{q_2\dot{q}_2}{q_2^2}\right)\,. \tag{5.4.12}$$

式 (5.4.10)–(5.4.12) を式 (5.4.9) に代入すると，式 (5.4.9) は次のようになる:

$$\begin{aligned}
k\frac{dl}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{q_1^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{q_{1\mu}}{\sqrt{q_1^2}}&=\frac{3}{2e}F_{\mu\nu}(x) q_2^\nu+\frac{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4} q_{1\mu}}{2q_1^2 e^{-kl}}L_{\mathrm{D}} \\
&\quad+\frac{\ddot{q}_{1\perp\mu}}{q_1^2}-\left(\frac{5q_1\dot{q}_1}{q_1^2}+\frac{q_2\dot{q}_2}{q_2^2}\right)\frac{\dot{q}_{1\perp\mu}}{2q_1^2}+\lambda_{1\mu}-\xi_\mu\,.
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

ここで，$\ddot{q}_{1\perp\mu}$ と $\ddot{q}_{2\perp\mu}$ を

$$\ddot{q}_{i\perp\mu}:=\ddot{q}_{i\mu}-q_{i\mu}\frac{q_i\ddot{q}_i}{q_i^2} \tag{5.4.14}$$

と定義した．また，$\ddot{q}_{i\mu}:=d^2q_{i\mu}/d\tau^2$, $q_i\ddot{q}_i:=q_{i\mu}\ddot{q}_i^\mu$ である (添字 i については和をとらない)．式 (5.4.13) を得たのと同様の手順を行うことで，q_2^μ に関するオイラー・

ラグランジュ方程式は

$$k\frac{dl}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{q_2^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{q_{2\mu}}{\sqrt{q_2^2}}=\frac{3}{2e}F_{\mu\nu}(x)q_1^\nu-\frac{\left(q_1^2q_2^2\right)^{1/4}q_{2\mu}}{2q_2^2e^{-kl}}L_{\mathrm{D}}$$
$$+\frac{\ddot{q}_{2\perp\mu}}{q_2^2}-\left(\frac{q_1\dot{q}_1}{q_1^2}+\frac{5q_2\dot{q}_2}{q_2^2}\right)\frac{\dot{q}_{2\perp\mu}}{2q_2^2}+\lambda_{2\mu}-\xi_\mu \tag{5.4.15}$$

と求まる．さらに，$\lambda_{1\mu}$, $\lambda_{2\mu}$, ξ_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ次のようになる:

$$q_1^\mu=\dot{x}^\mu\,, \tag{5.4.16}$$

$$q_2^\mu=\dot{x}^\mu\,, \tag{5.4.17}$$

$$q_1^\mu=q_2^\mu\,. \tag{5.4.18}$$

式 (5.4.18) は，式 (5.4.16) と式 (5.4.17) からも求められる．

式 (5.4.16) と式 (5.4.17) を式 (5.4.13) に代入し，

$$L_{\mathrm{D}}\left(q_1^\mu,\dot{q}_1^\mu,\lambda_{1\mu};q_2^\mu,\dot{q}_2^\mu,\lambda_{2\mu}\right)=L_{\mathrm{D}}\left(\dot{x}^\mu,\ddot{x}^\mu,\lambda_{1\mu};\dot{x}^\mu,\ddot{x}^\mu,\lambda_{2\mu}\right)=0 \tag{5.4.19}$$

が成り立つことを用いると，

$$k\frac{dl}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}=\frac{3}{2e}F^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu+\frac{\dddot{x}_\perp^\mu}{\dot{x}^2}-\frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}_\perp^\mu}{(\dot{x}^2)^2}+\lambda_1^\mu-\xi^\mu \tag{5.4.20}$$

が得られる．同様に，式 (5.4.16) と式 (5.4.17) を式 (5.4.15) に代入し，式 (5.4.19) を用いると，

$$k\frac{dl}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}=\frac{3}{2e}F^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu+\frac{\dddot{x}_\perp^\mu}{\dot{x}^2}-\frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}_\perp^\mu}{(\dot{x}^2)^2}+\lambda_2^\mu-\xi^\mu \tag{5.4.21}$$

が求まる．式 (5.4.21) と式 (5.4.20) を比較すると，

$$\lambda_1^\mu=\lambda_2^\mu \tag{5.4.22}$$

が導かれる．式 (5.4.22) はゲージ変換 (5.4.4) に対して共変的である．式 (5.4.22) から，式 (5.4.8) は恒等的に満たされることがわかる．なぜなら，式 (5.4.16) と式 (5.4.17) を用いると，$\partial_\mu F_{\nu\rho}(x)q_1^\nu q_2^\rho=\partial_\mu F_{\nu\rho}(x)\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho=0$ が計算できるからである．いま，式 (5.4.22) を考慮して，λ_1^μ と λ_2^μ を λ^μ と書くと，式 (5.4.20) と式 (5.4.21) は次の 1 つの式に帰着する:

$$k\frac{dl}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}=\frac{3}{2e}F^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu+\frac{\dddot{x}_\perp^\mu}{\dot{x}^2}-\frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}_\perp^\mu}{(\dot{x}^2)^2}+\Lambda^\mu\,. \tag{5.4.23}$$

ここで，$\Lambda^\mu := \lambda^\mu - \xi^\mu$ を定義した．この Λ^μ は，明らかに，ゲージ変換 (5.4.4) のもとで不変である．式 (5.4.23) は，式 (5.4.2) の下で述べた x^μ についての運動方程式である．固有時 l の中の x^μ は式 (5.4.23) の解に等しいので，式 (5.4.2) の τ 微分は

$$\frac{dl(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\dot{x}_\mu(\tau)\dot{x}^\mu(\tau)} \tag{5.4.24}$$

と求まる．式 (5.4.24) を式 (5.4.23) に代入し，$k = 3m/2e^2$ を代入すると，

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = eF^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2}\right) + \frac{2}{3}e^2\Lambda^\mu \tag{5.4.25}$$

が得られる．この式は，ローレンツ・ディラック方程式にソース項 $2e^2\Lambda^\mu/3$ を加えた式になっている．実際に式 (5.4.25) で $\Lambda^\mu = 0$ とおくと，その式は世界線上の任意のパラメーター τ を用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式そのものであることがわかる (式 (5.7.8) 参照)．このことより，式 (5.4.25) をソース項を持つローレンツ・ディラック方程式と呼ぶことができる．このようにして，ラグランジアン L_D からソース項を持つローレンツ・ディラック方程式が導出された．

いま，固有時ゲージ $\tau = l$ を採用する．すると，$\dot{x}^\mu = u^\mu$, $\dot{x}^2 = 1$, $\dot{x}\ddot{x} = 0$ が成り立つので，式 (5.4.25) は

$$m\frac{du^\mu}{dl} = eF^{\mu\nu}(x)u_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\delta^\mu{}_\nu - u^\mu u_\nu\right)\frac{d^2u^\nu}{dl^2} + \frac{2}{3}e^2\Lambda^\mu \tag{5.4.26}$$

となる．この式は (本来の) ローレンツ・ディラック方程式 (5.1.2) にソース項 $2e^2\Lambda^\mu/3$ を加えた式である．

5.5 交差項を持つラグランジアン

この節では，第 5.4 節で議論したラグランジアンとは別のラグランジアンを構成し，そのラグランジアンからもローレンツ・ディラック方程式が導かれることを示す．

次のラグランジアンを与える:

$$\begin{aligned}L_\mathrm{A} = \frac{1}{(q_1^2q_2^2)^{1/4}}\Bigg[&\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{q}_{1\perp}^2}{q_1^2} - \frac{\dot{q}_{2\perp}^2}{q_2^2}\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{\dot{q}_{1\perp\mu}q_2^\mu}{\sqrt{q_1^2}} - \frac{\dot{q}_{2\perp\mu}q_1^\mu}{\sqrt{q_2^2}}\right)\\ &-\lambda_{1\mu}\left(q_1^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \lambda_{2\mu}\left(q_2^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \xi_\mu\left(q_1^\mu - q_2^\mu\right) - \frac{3}{2e}F_{\mu\nu}(x)q_1^\mu q_2^\nu\Bigg].\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

このラグランジアン L_{A} とラグランジアン L_{D} で異なる点は，減衰因子 $\exp(-kl)$ の代わりに交差項 (k に比例する項) が含まれている点である．これに伴って，ラグランジアン L_{A} はパラメーター τ にあらわに依存しない関数になっている．また，ラグランジアン L_{A} には，ラグランジアン L_{D} と同様に，$\dot{q}_{i\perp}^2/q_i^2$ が含まれている．さて，変換則 (5.3.2)，(5.3.3)，(5.3.4)，(5.3.5)，(5.3.7) を用いると，作用積分

$$S_{\mathrm{A}} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau L_{\mathrm{A}} \tag{5.5.2}$$

はパラメーターの付け替えのもとで不変であることを示すことができる．また，ラグランジアン L_{A} は，ラグランジアン L_{D} と同様に，ゲージ変換 (5.4.4) のもとで不変である．さらに，ラグランジアン L_{A} は

$$L_{\mathrm{A}}\left(q_1^\mu, \dot{q}_1^\mu, \lambda_{1\mu}; q_2^\mu, \dot{q}_2^\mu, \lambda_{2\mu}\right) = -L_{\mathrm{A}}\left(q_2^\mu, \dot{q}_2^\mu, \lambda_{2\mu}; q_1^\mu, \dot{q}_1^\mu, \lambda_{1\mu}\right) \tag{5.5.3}$$

という反対称性を持つ関数である．

ラグランジアン L_{A} の各力学変数に関するオイラー・ラグランジュ方程式を導出するために，

$$J := \frac{\dot{q}_{1\perp\mu} q_2^\mu}{\sqrt{q_1^2}} - \frac{\dot{q}_{2\perp\mu} q_1^\mu}{\sqrt{q_2^2}} \tag{5.5.4}$$

を定義し，式 (5.4.6) の K_i を用いて，ラグランジアン (5.4.1) を

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}} \Bigg[& \frac{1}{2}\left(K_1 - K_2\right) - \frac{k}{2} J \\ & - \lambda_{1\mu}\left(q_1^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \lambda_{2\mu}\left(q_2^\mu - \dot{x}^\mu\right) + \xi_\mu\left(q_1^\mu - q_2^\mu\right) - \frac{3}{2e} F_{\mu\nu}(x) q_1^\mu q_2^\nu \Bigg] \end{aligned} \tag{5.5.5}$$

と書き換える．まず，x^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\left(\lambda_{1\mu} - \lambda_{2\mu}\right)\right] + \frac{3}{2e\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}} \partial_\mu F_{\nu\rho}(x) q_1^\nu q_2^\rho = 0 \tag{5.5.6}$$

となる．式 (5.5.6) にはラグランジアン L_{A} のゲージ不変性に伴って，ゲージ不変な量 $\lambda_{1\mu} - \lambda_{2\mu}$ が含まれている．このため，$\lambda_{1\mu}$ と $\lambda_{2\mu}$ は一意的に定まらない．次に，q_1^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu} - \frac{\partial K_1}{\partial q_1^\mu}\right) - \frac{k}{2}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_1^\mu} - \frac{\partial J}{\partial q_1^\mu}\right) + \lambda_{1\mu} - \xi_\mu + \frac{3}{2e} F_{\mu\nu}(x) q_2^\nu\right] \\ & + \left(\frac{d}{d\tau}\frac{1}{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4}}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\partial K_1}{\partial \dot{q}_1^\mu} - \frac{k}{2}\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_1^\mu}\right) + \frac{q_{1\mu}}{2 q_1^2} L_{\mathrm{A}} = 0 \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

となる．式 (5.5.7) に式 (5.4.10)–(5.4.12) と

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_1^\mu} = \frac{1}{\sqrt{q_1^2}} \left(q_{2\mu} - \frac{q_1 q_2}{q_1^2} q_{1\mu} \right), \tag{5.5.8}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial J}{\partial \dot{q}_1^\mu} - \frac{\partial J}{\partial q_1^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{q_{2\mu}}{\sqrt{q_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{q_1^2}} \left(\dot{q}_{2\mu} - \frac{q_1 \dot{q}_2}{q_1^2} q_{1\mu} \right) \tag{5.5.9}$$

を代入すると，次の式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\left[\frac{d}{d\tau}\frac{q_{2\mu}}{\sqrt{q_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{q_1^2}} \left(\dot{q}_{2\mu} - \frac{q_1 \dot{q}_2}{q_1^2} q_{1\mu} \right) \right] \\
&= \frac{3}{2e} F_{\mu\nu}(x) q_2^\nu + \frac{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4} q_{1\mu}}{2q_1^2} L_{\mathrm{A}} + \frac{\ddot{q}_{1\perp\mu}}{q_1^2} - \left(\frac{5 q_1 \dot{q}_1}{q_1^2} + \frac{q_2 \dot{q}_2}{q_2^2} \right) \frac{\dot{q}_{1\perp\mu}}{2q_1^2} + \lambda_{1\mu} - \xi_\mu \\
&\quad + \frac{k}{4\sqrt{q_1^2}} \left(\frac{q_1 \dot{q}_1}{q_1^2} + \frac{q_2 \dot{q}_2}{q_2^2} \right) \left(q_{2\mu} - \frac{q_1 q_2}{q_1^2} q_{1\mu} \right) .
\end{aligned} \tag{5.5.10}$$

ここで，$q_1 q_2 := q_{1\mu} q_2^\mu$, $q_1 \dot{q}_2 := q_{1\mu} \dot{q}_2^\mu$ である．同様に，q_2^μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式は次のように求まる:

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{2}\left[\frac{d}{d\tau}\frac{q_{1\mu}}{\sqrt{q_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{q_2^2}} \left(\dot{q}_{1\mu} - \frac{\dot{q}_1 q_2}{q_2^2} q_{2\mu} \right) \right] \\
&= \frac{3}{2e} F_{\mu\nu}(x) q_1^\nu - \frac{\left(q_1^2 q_2^2\right)^{1/4} q_{2\mu}}{2q_2^2} L_{\mathrm{A}} + \frac{\ddot{q}_{2\perp\mu}}{q_2^2} - \left(\frac{q_1 \dot{q}_1}{q_1^2} + \frac{5 q_2 \dot{q}_2}{q_2^2} \right) \frac{\dot{q}_{2\perp\mu}}{2q_2^2} + \lambda_{2\mu} - \xi_\mu \\
&\quad + \frac{k}{4\sqrt{q_2^2}} \left(\frac{q_1 \dot{q}_1}{q_1^2} + \frac{q_2 \dot{q}_2}{q_2^2} \right) \left(q_{1\mu} - \frac{q_1 q_2}{q_2^2} q_{2\mu} \right).
\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

さらに，$\lambda_{1\mu}$, $\lambda_{2\mu}$, ξ_μ に関するオイラー・ラグランジュ方程式はそれぞれ次のようになる:

$$q_1^\mu = \dot{x}^\mu \, , \tag{5.5.12}$$

$$q_2^\mu = \dot{x}^\mu \, . \tag{5.5.13}$$

$$q_1^\mu = q_2^\mu \, . \tag{5.5.14}$$

これらの式は互いに両立している．

式 (5.5.12) と式 (5.5.13) を式 (5.5.10) に代入し，

$$L_{\mathrm{A}}\left(q_1^\mu, \dot{q}_1^\mu, \lambda_{1\mu}; q_2^\mu, \dot{q}_2^\mu, \lambda_{2\mu}\right) = L_{\mathrm{A}}\left(\dot{x}^\mu, \ddot{x}^\mu, \lambda_{1\mu}; \dot{x}^\mu, \ddot{x}^\mu, \lambda_{2\mu}\right) = 0 \tag{5.5.15}$$

が成り立つことを用いると，

$$k\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{3}{2e}F^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu + \frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2} + \lambda^\mu_1 - \xi^\mu \tag{5.5.16}$$

が得られる．同様に，式 (5.5.12) と式 (5.5.13) を式 (5.5.11) に代入し，式 (5.5.15) を用いると，

$$k\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = \frac{3}{2e}F^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu + \frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2} + \lambda^\mu_2 - \xi^\mu \tag{5.5.17}$$

が求まる．式 (5.5.17) と式 (5.5.16) を比較すると，

$$\lambda^\mu_1 = \lambda^\mu_2 \tag{5.5.18}$$

が導かれる．この式と $\partial_\mu F_{\nu\rho}(x)q^\nu_1 q^\rho_2 = \partial_\mu F_{\nu\rho}(x)\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0$ が成り立つことから，式 (5.5.6) は恒等的に満たされることがわかる．ここで，$\Lambda^\mu := \lambda^\mu - \xi^\mu$ ($\lambda^\mu := \lambda^\mu_1 = \lambda^\mu_2$) とおき，$k = 3m/2e^2$ を代入すると，式 (5.5.16) と式 (5.5.17) は次の 1 つの式に帰着する:

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = eF^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2}\right) + \frac{2}{3}e^2\Lambda^\mu\,. \tag{5.5.19}$$

この方程式はソース項を持つローレンツ・ディラック方程式 (5.4.25) に等しい．このようにして，ラグランジアン L_A からもまたソース項を持つローレンツ・ディラック方程式が導かれた．

5.6 まとめと今後の課題

本章では，外曲率の 2 乗を基本とする剛性を持つ粒子のラグランジアン (5.2.6) を変形し，それに外部電磁場 $F_{\mu\nu}$ との結合項を加えることで，2 種類の相対論的なラグランジアン L_D と L_A が構成された．その後，L_D と L_A からソース項を持つローレンツ・ディラック方程式がオイラー・ラグランジュ方程式として得られることが別々に示された．ここで得られた方程式は，非同次項 $2e^2\Lambda^\mu/3$ を持つ x^μ についての微分方程式である．したがって，その方程式の解は Λ^μ に依存している．そのため，ローレンツ・ディラック方程式そのものは，得られた方程式で $\Lambda^\mu = 0$ とした特別な場合として導出される．このことから，L_D と L_A はそれぞれ，ローレンツ・ディラック方程式を与えるラグランジアンであることが結論された．

式 (5.5.19) の両辺に $\dot{x}^\mu$ を乗じて内積をとると，直交条件

$$\dot{x}_\mu \Lambda^\mu = 0 \tag{5.6.1}$$

が得られる．この条件は，$\boldsymbol{\Lambda}$ と速度ベクター $\boldsymbol{v}$ をそれぞれ，$\boldsymbol{\Lambda} := (\Lambda^r)\,(r = 1, 2, 3)$ と $\boldsymbol{v} := (dx^r/dx^0)$ とおくことで，$\Lambda^0 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Lambda}$ と書き換えられる．したがって，4 元ベクター (Λ^μ) の成分は，$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda})$ と表せる．このことと式 (5.5.19) から，ソース項 $2e^2\Lambda^\mu/3$ は，荷電粒子に作用する (ローレンツ力とは別の) 外力を $\boldsymbol{f} := (2e^2/3)\boldsymbol{\Lambda}$ とすれば，4 元力 $(f^\mu) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})$ の成分とみなされる．このようにして，ソース項は外力に相当することがわかる．

減衰調和振動子を記述する間接的なラグランジュ形式 [111] では，2 つの座標変数が導入されている．このうちの 1 つの座標変数は未来方向の運動を記述して，残りの座標変数は過去方向の運動を記述している．しかしながら，本研究で用いた q_1^μ と q_2^μ は，そのような 2 つの座標変数とは本質的に異なっている．このことは実際に，減衰項を持つラグランジアン L_{D} にも q_1^μ と q_2^μ が含まれていることからも確かめられる．また，ラグランジアン L_{D} と L_{A} のそれぞれから $q_1^\mu = q_2^\mu = \dot{x}^\mu$ が求まることは，q_1^μ と q_2^μ がローレンツ・ディラック方程式を導くための補助変数としての役割を果たしていることを意味している．

本章では，あらわにパラメーター τ に依存するラグランジアン L_{D} とあらわにパラメーター τ に依存しないラグランジアン L_{A} が与えられた．さて，減衰調和振動子の無矛盾な量子化 [108, 112, 113] を実行する際には，あらわに時間依存するラグランジアンよりも，あらわに時間依存しないラグランジアンが採用されている．このことを考慮すると，ローレンツ・ディラック方程式に従う荷電粒子の量子力学を議論するためには，ラグランジアン L_{A} を採用することが適切であると考えられる．したがって，今後の課題として，L_{A} を基に放射反作用を受ける粒子の解析力学や量子力学を考察することが挙げられる．

5.7 補遺

5.7.1 世界線上のパラメーターを用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式

ここでは，世界線上の任意のパラメーターを用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式を与える．

固有時 l を用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式 (5.1.2) は次式である:

$$m\frac{du^\mu}{dl} = eF^{\mu\nu}(x)u_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\delta^\mu{}_\nu - u^\mu u_\nu\right)\frac{d^2u^\nu}{dl^2}\,. \tag{5.7.1}$$

いま，固有時の無限小量 dl は $dl = \sqrt{\dot{x}^2}d\tau$ と表せるので，次の式が成り立つことを示すことができる:

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{dl} = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}\,, \tag{5.7.2}$$

$$\frac{du^\mu}{dl} = \frac{\ddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2}\,, \tag{5.7.3}$$

$$\frac{d^2u^\mu}{dl^2} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}}\left[\frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2} - \left(\ddot{x}^2 - \frac{(\dot{x}\ddot{x})^2}{\dot{x}^2}\right)\frac{\dot{x}^\mu}{(\dot{x}^2)^2}\right]. \tag{5.7.4}$$

ここで，

$$\ddot{x}^\mu_\perp := \ddot{x}^\mu - \dot{x}^\mu\frac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{x}^2}\,, \qquad \dddot{x}^\mu_\perp := \dddot{x}^\mu - \dot{x}^\mu\frac{\dot{x}\dddot{x}}{\dot{x}^2} \tag{5.7.5}$$

である．また，

$$\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}\,, \qquad \ddot{x}^\mu := \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}\,, \qquad \dddot{x}^\mu := \frac{d^3x^\mu}{d\tau^3}\,, \tag{5.7.6}$$

$$\dot{x}^2 := \dot{x}_\mu\dot{x}^\mu\,, \qquad \ddot{x}^2 := \ddot{x}_\mu\ddot{x}^\mu\,, \qquad \dot{x}\ddot{x} := \dot{x}_\mu\ddot{x}^\mu\,, \qquad \dot{x}\dddot{x} := \dot{x}_\mu\dddot{x}^\mu\,. \tag{5.7.7}$$

である．いま，式 (5.1.2) に式 (5.7.2) と式 (5.7.4) を代入すると，世界線上の任意のパラメーター τ を用いて書かれたローレンツ・ディラック方程式が

$$m\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} = eF^{\mu\nu}(x)\dot{x}_\nu + \frac{2}{3}e^2\left(\frac{\dddot{x}^\mu_\perp}{\dot{x}^2} - \frac{3(\dot{x}\ddot{x})\ddot{x}^\mu_\perp}{(\dot{x}^2)^2}\right) \tag{5.7.8}$$

と得られる．式 (5.7.8) は，固有時ゲージ $\tau = l$ を採用することなく，荷電粒子が受ける放射反作用を評価することでも導出される．

第6章　結論

本論文では，剛性を持つ無質量粒子と剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を構築し，これらの形式に基づく量子化の議論を通じて粒子のスピン量子数が取り得る値を求めた．求められたスピン量子数の値はPlyushchayが先行研究で求めた値に等しく，DeriglazovとNersessianによる報告を否定するものになっている．本論文ではツイスター理論の枠組みですべての拘束条件を矛盾無く扱っており，求められたスピン量子数の値 (すなわちPlyushchayが求めた値) は正しいものと言える．また，剛性を持つ粒子の波動関数 (ツイスター関数) のペンローズ変換を行うことで4次元時空におけるスピナー場を導出し，それが場の方程式 (無質量粒子の場合は一般化されたワイル方程式，有質量粒子の場合は一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式) を満たすことを確認した．加えて，剛性を持つ粒子模型の研究の派生として，外曲率の2乗を含むラグランジアンを変形し外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える2種類のラグランジアンを構成した．

具体的には以下の議論が行われた: 第2章では，ゲージ化された白藤の作用積分を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，それに基づく正準形式を展開し，その後，無質量粒子の正準量子化を行った．まず，ゲージ化された白藤の作用積分が時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}$, ψ^{α} を用いて書き換えられた．その後，時空座標とスピナー変数を用いて書かれたゲージ化された白藤の作用積分に基づく正準形式がディラックの手法に従って構築された．その際，第二類拘束条件はディラック括弧を定義して正準変数を減らすことで処理された．

正準量子化の手続きは，正準変数を対応する演算子に置き換え，ディラック括弧から定まる交換関係を設定することで実行された．このとき第一類拘束条件は，物理的状態を定義する条件式として読み替えられた．この条件式からスピナー型の平面波解 $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x,\bar{\pi},\pi)$ が得られ，同時に，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限された．平面波解 Φ に係数関数 $\tilde{F}^{\pm}$ をかけて $\bar{\pi}_{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}}$ に関する積分を行うことで，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場 $\Psi^{\pm}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$

が求められた．また，このスピナー場 $\Psi^{\pm}$ は，係数関数 $\tilde{F}^{\pm}$ に対して適切なフーリエ・ラプラス変換を実行することで，ツイスター関数 $F^{\pm}$ のペンローズ変換として表された．さらに，$\Psi^{\pm}$ を生成する指数型母関数 $\boldsymbol{\Psi}^{\pm}$ が構成され，$\Psi^{\pm}$ に対する新たな表示が求められた．

第 3 章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を導き，その作用積分がゲージ化された白藤の作用積分に一致することを証明した．また，この作用積分に基づく剛性を持つ無質量粒子の量子化を実行した．まず，白藤の方法を剛性を持つ無質量粒子模型に適用するために，剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンと等価な 1 次形式のラグランジアンが与えられた．その後，1 次形式のラグランジアンから得られる拘束条件の解が，スピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}$ と ψ^{α} を用いて書き下された．この解を 1 次形式のラグランジアンに代入することで，時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}, \psi^{\alpha}$ を用いて書かれたラグランジアンが導かれた．さらに，このラグランジアンを $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\pi_{\dot{\alpha}}, \psi^{\alpha}$ から成るツイスター変数 Z^A を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子の作用積分が導出された．この作用積分はゲージ化された白藤の作用積分に一致する．

ツイスター変数で表現された作用積分に基づく剛性を持つ無質量粒子の量子化が第 2 章と同様の手順で実行され，拘束条件を満たす次数 $-2k-2$ のツイスター関数 $F(Z)$ が得られた．関数 $F(Z)$ は量子論における波動関数に相当しており，ツイスター関数 $F(Z)$ に 1 価性を課すことは自然である．この条件を実際に課すと，次数 $-2k-2$ は整数値になるので，ヘリシティー k の値は整数値または半整数値に制限されることがわかった．この結果は，Plyushchay の結論に一致している．また，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場 $\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ が，ツイスター関数 $F(Z)$ のペンローズ変換として求められた．Plyushchay はこのようなスピナー場を導くには至らなかったが，本研究ではツイスター関数のペンローズ変換としてスピナー場を導出することができた．

第 4 章では，第 3 章と同様の手順で剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を導き，それに基づく正準形式を展開した．その後，剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を考察した．まず，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンと等価な 1 次形式のラグランジアンが与えられ，これより得られる拘束条件の解が，運動量スピナー $\pi_{i\dot{\alpha}}$ を用いて書き下された．この解を 1 次形式のラグランジアンに代入し，$x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\pi_{i\dot{\alpha}}$ から成るツイスター変数 Z_i^A を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが導出された．ここで，有質量

粒子の場合に2個のツイスター変数が必要になることは，従来の関連する研究と整合している．また，ツイスター変数で表現されたラグランジアンは $U(1)_1 \times U(1)_2$ 変換のもとで不変である．その後，この $U(1)_1 \times U(1)_2$ 不変性の一部を壊すようなゲージ固定条件と付加条件が課され，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンに基づく正準形式が，ディラックの手法に従って構築された．その際，第二類拘束条件はディラック括弧を定義して正準変数を減らすことで処理された．

正準量子化の手続きは，正準変数を対応する演算子に置き換え，ディラック括弧から定まる交換関係を設定することで実行された．このとき，第一類拘束条件は物理的状態を定義する条件式として読み替えられた．この条件式から，Z_1^A と Z_2^A それぞれについて次数 $-2s_* - 2$ のツイスター関数 $F_J(Z)$ が得られた．次数 $-2s_* - 2$ は，$F_J(Z)$ に1価性を課すことで整数値に制限された．また，得られたツイスター関数 $F_J(Z)$ のペンローズ変換を行うことで，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たす4次元時空におけるスピナー場 $\Psi^{i_1 \ldots i_{p+l}}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+l}\,;\, j_1 \ldots j_q, \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x)$ が求められた．本研究では，ツイスター理論の手法を適用することで，Plyushchay が導くには至らなかった場の関数が導出された．さらに考察を進めることで，スピナー添字 α の個数 $p + l$ とスピナー添字 $\dot{\alpha}$ の個数 q，そしてスピン量子数 J との間に $J = (p + l + q)/2$ が成り立つことが証明された．この式と，$F_J(Z)$ が Z_1^A と Z_2^A について同じ次数 $-2s_* - 2$ であることを用いて，スピン量子数 J の値は0または正の整数値に制限されることが示された．このことから，粒子のスピン量子数が半整数値をとる可能性は否定され，Plyushchay の結論を支持する結果が得られた．また，パウリ・ルバンスキーのスピンベクターを解析することで，粒子の質量 M は J に依存して $M_J = m/\sqrt{1 + J(J+1)/k^2}$ のように定まることがわかった．

第5章では，外曲率 K の2乗を含むラグランジアンを変形し，それに外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える2種類の相対論的なラグランジアン L_{D} と L_{A} が構成された．ラグランジアン L_{D} は世界線のパラメーターにあらわに依存する減衰項を含んでおり，ラグランジアン L_{A} は世界線のパラメーターにあらわに依存しない，2つの力学変数から成る交差項を含んでいる．ラグランジアン L_{D} と L_{A} のそれぞれから，ソース項を持つローレンツ・ディラック方程式が，オイラー・ラグランジュ方程式として導出された．これらのラグランジアンが得られたことで，放射反作用を受ける粒子の解析力学が構築できると共に，放射反作用の量子論に対する新たなアプローチが可能になると考えられる．

剛性を持つ粒子模型を定めるラグランジアンは，外曲率 $K = \sqrt{\ddot{x}_\perp^2/(\dot{x}^2)^2}$ を含む項を持つので，そのラグランジアンには時空座標の 2 階微分を含むという特徴がある．このことは，オストログラドスキー・ゴースト[1] が現れる可能性があることを意味している．しかしながら，そのようなゴーストは，ツイスター変数で表現された剛性を持つ粒子模型には現れないことがわかるので，オストログラドスキー・ゴーストは，通常の剛性を持つ粒子模型にも現れないことが期待される．そこで今後の課題として，ゴーストの有無の判定条件を与えるオストログラドスキーの定理 [114–116] を剛性を持つ粒子のラグランジアンに適用し，実際に，ゴーストは現れないことを示すことが挙げられる．また，同様の考察を，外曲率の任意関数を持つより一般化された剛性を持つ粒子模型に対して行うことも興味深い課題である．

[1] ゴーストとは，下限のないハミルトニアンを生じる自由度のことで，その中でも特に高階微分を含む理論において生じるものは，オストログラドスキー・ゴーストと呼ばれる．このようなゴーストの存在は，ハミルトニアンが，通常，系のエネルギーを与えることより，系のエネルギーの最小状態が存在しないことを意味する [114–116].

謝辞

本研究を進めるにあたり，熱心なご指導を頂いた，出口 真一先生に深く感謝致します．なお，出口先生におかれましては学業および研究以外の面でも多大なご配慮を頂き，誠に有難うございました．また，有益なご助言を下された，日本大学 理工学部 素粒子論研究室の藤川 和男先生，仲 滋文先生，二瓶 武史先生，三輪 光嗣先生，大谷 聡先生に厚く謝意を申し述べます．さらに，本研究に関して多大なご協力を頂いた，日本大学 理工学部 素粒子論研究室の江上 武史氏，根岸 翔馬氏，岡野 諭氏，中野 邦彦氏に感謝致します．

本研究を行うにあたり，甚大なご支援を頂いた日本大学 短期大学部 (船橋校舎) の先生方，特に，日本大学 短期大学部 次長の前野 賀彦先生，日本大学 短期大学部 一般教育教室の山口 雄仁先生，豊田 陽己先生，服部 英恵先生，川根 深先生，日本大学 短期大学部 ものづくり・サイエンス総合学科の山田 賢治先生，駒田 智彦先生，前田 知人先生に心よりお礼申し上げます．

最後に，長い間見守り続けてくれた家族に深く感謝致します．

参考文献

[1] Y. Nambu, Duality and hadrodynamics. *Lectures at the Copenhagen High Energy Symposium* (1970).

[2] T. Goto, Prog. Theor. Phys. **46**, 1560 (1971).

[3] A. Polyakov, Nucl. Phys. **B268**, 406 (1986).

[4] P. Olesen and S. K. Yang, Nucl. Phys. **B283**, 73 (1987).

[5] C. Itoi, Phys. Lett. **B211**, 146 (1988).

[6] 村瀬 郵市, Extrinsic Torsion をもつ Rigid String の実効ポテンシャル (1992 年学位論文, 日本大学) (1992).

[7] R. D. Pisarski, Phys. Rev. **D34**, 670 (1986).

[8] M. S. Plyushchay, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1299 (1988).

[9] M. S. Plyushchay, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 3851 (1989).

[10] C. Batlle, J. Gomis, J. M. Pons and N. Román-Roy, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 2693 (1988).

[11] M. S. Plyushchay, Mod. Phys. Lett. **A4**, 837 (1989).

[12] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B243**, 383 (1990).

[13] E. Ramos and J. Roca, Nucl. Phys. **B436**, 529 (1995).

[14] A. Deriglazov and A. Nersessian, Phys. Lett. **A378**, 1224 (2014).

[15] R. Banerjee, P. Mukherjee and B. Paul, J. High Energy Phys. **08**, 085 (2011).

[16] R. Banerjee, B. Paul and S. Upadhyay, Phys. Rev. **D88**, 065019 (2013).

[17] M. Pavšič, Phys. Lett. **B205**, 231 (1988).

[18] M. Pavšič, Phys. Lett. **B221**, 264 (1989).

[19] T. Dereli, D. H. Hartley, M. Onder and R. W. Tucker, Phys. Lett. **B252**, 601 (1990).

[20] M. Pavšič, Found. Phys. **37**, 40 (2007).

[21] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B253**, 50 (1991).

[22] V. V. Nesterenko, A. Feoli and G. Scarpetta, J. Math. Phys. **36**, 5552 (1995).

[23] S. Deguchi and T. Suzuki, Phys. Lett. **B731**, 337 (2014).

[24] M. Pavšič, Phys. Lett. **B740**, 329 (2015).

[25] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London Ser. **A167**, 148 (1938).

[26] J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 243 (1926).

[27] T. Nakano, Prog. Theor. Phys. **15**, 333 (1956).

[28] O. Hara and T. Goto, Prog. Theor. Phys. Suppl. **41**, 56 (1968).

[29] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **23**, 915 (1960).

[30] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **57**, 329 (1977).

[31] A. O. Barut and N. Zanghi, Phys. Rev. Lett. **52**, 2009 (1984).

[32] J. Vaz, Phys. Lett. **B344**, 149 (1995).

[33] A. Kar and S. G. Rajeev, Ann. Phys. **326**, 958 (2011).

[34] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vecchia and P. Howe, Phys. Lett. **B64**, 435 (1976).

[35] A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nuovo Cim. **A35**, 377 (1976).

[36] F. A. Berezin and M. S. Marinov, Ann. Phys. **104**, 336 (1977).

[37] R. Casalbuoni, Phys. Lett. **B62**, 49 (1976).

[38] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **A33**, 389 (1976).

[39] L. Brink and J. H. Schwarz, Phys. Lett. **B100**, 310 (1981).

[40] T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **70**, 18 (1983).

[41] R. Penrose and M. A. H. MacCallum, Phys. Rep. **6**, 241 (1973).

[42] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time*, Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, (1986).

[43] S. A. Huggett and K. P. Tod,, *An Introduction to Twistor Theory*, 2nd edn, London Mathematical Society, Student Texts 4, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

[44] 高崎 金久, ツイスターの世界, 共立出版 (2005).

[45] R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **1**, 61 (1968).

[46] S. Deguchi and J. Note, J. Math. Phys. **54**, 072304 (2013).

[47] A. I. Gumenchuk and D. P. Sorokin, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 350 (1990).

[48] I. A. Bandos, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 906 (1990).

[49] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B240**, 133 (1990).

[50] I. Bandos, J. Lukierski and D. Sorokin, Phys. Rev. **D61**, 045002 (2000).

[51] S. Fedoruk, E. Ivanov and J. Lukierski, Phys. Lett. **B641**, 226 (2006).

[52] A. Ferber, Nucl. Phys. **B132**, 55 (1978).

[53] S. Deguchi, T. Egami and J. Note, Prog. Theor. Phys. **124**, 969 (2010).

[54] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science,Yeshiva University, New York, (1964).

[55] A. J. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Rome, (1976).

[56] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1992).

[57] S. Fedoruk and E. Ivanov, Class. Quantum Grav. **23**, 5195 (2006).

[58] M. A. Vasiliev, Phys. Rev. **D66**, 066006 (2002).

[59] I. Bars and Picón, Phys. Rev. **D73**, 064002 (2006).

[60] I. Bars, arXive:hep-th/0601091 (2006).

[61] 菅野 礼司, ゲージ理論の解析力学, 吉岡書店 (2007).

[62] E. S. Fradkin and M. Y.Palchik, *Conformal Quantum Field Theory in D-dimensions*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1996).

[63] S. Deguchi, 素粒子論研究 電子版**15**, 59 (2013).

[64] A. Bette, J. Math. Phys. **25**, 2456 (1984).

[65] S. Fedoruk and V. G. Zima, J. Kharkov Univ. **585**, 39 (2003).

[66] S. Fedoruk, A. Frydryszak, J. Lukierski and C. Miquel-Espanya, Int. J. Mod. Phys. **A21**, 4137 (2006).

[67] S. Deguchi and S. Okano, Phys. Rev. **D93**, 089906 (2016).

[68] M. Pavšič, arXive:hep-th/1405.7838 (2014).

[69] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time*, Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields, Cambridge Monographs on Mathematical Physics,, Cambridge University Press, Cambridge, (1984).

[70] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B236**, 291 (1990).

[71] M. S. Plyushchay, Phys. Lett. **B262**, 71 (1991).

[72] S. Fedoruk and J. Lukierski, Phys. Lett. **B733**, 309 (2014).

[73] J. A. de Azcárraga, S. Fedoruk, J. M. Izquierdo, and J. Lukierski, J. High Energy Phys. **04**, 010 (2015).

[74] A. Bette, J. A. de Azcárraga, J. Lukierski, and C. Miquel-Espanya, Phys. Lett. **B595**, 491 (2004).

[75] J. A. de Azcárraga, A. Frydryszak, J. Lukierski, and C. Miquel-Espanya, Phys. Rev. **D73**, 105011 (2006).

[76] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, and J. Lukierski, J. High Energy Phys. **01**, 041 (2009).

[77] L. Mezincescu, A. J. Routh, and P. K. Townsend, Ann. Phys. (Amsterdam) **346**, 66 (2014).

[78] L. Mezincescu, A. J. Routh, and P. K. Townsend, J. Phys. **A49**, 025401 (2016).

[79] A. J. Routh and P. K. Townsend, J. Phys. **A49**, 025402 (2016).

[80] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. **A155**, 447 (1936).

[81] M. Fierz, Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).

[82] M. Fierz and W. Pauli, Proc. R. Soc. **A173**, 211 (1939).

[83] P. Clausa, R. Kalloshb and J. Rahmfeldb, Phys. Lett. **B462**, 285 (1999).

[84] L. P. Hughton, *Twistor and Particles*, Lecture Notes in Physics Vol. 97, Springer-Verlag, Berlin (1994).

[85] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, (1975).

[86] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, (1998).

[87] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, New York, (1980).

[88] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, 3rd ed., World Scientific, Singapore, (2007).

[89] F. Rohrlich, Am. J. Phys. **65**, 1051 (1997).

[90] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field*, Cambridge University Press, (2004).

[91] H. A. Lorentz, Arch. Néerland. Sci. Exactes Nat. **25**, 363 (1892).

[92] M. Abraham, *Theorie der Elektrizität*, Vol. II: *Elektromagnetische The orie der Strahlung*, Teubner, Leipzig, (1905).

[93] H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, 2nd ed., Dover, New York, (1952).

[94] A. O. Barut, Phys. Rev. **D10**, 3335 (1974).

[95] E. Poisson, arXiv:gr-qc/9912045 (1999).

[96] C. W. Nakhleh, Am. J. Phys. **81**, 180 (2013).

[97] A. D. Yaghjian, *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere*, 2nd ed., Lect. Notes Phys. 686, Springer-Verlag, New York, (2006).

[98] A. O. Barut, Phys. Lett. **A145**, 387 (1990).

[99] G. W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Lett. **A157**, 317 (1991).

[100] G. W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Lett. **A174**, 182 (1993).

[101] H. Spohn, Europhys. Lett. **50**, 287 (2000).

[102] F. Rohrlich, Phys. Lett. **A283**, 276 (2001).

[103] F. Rohrlich, Phys. Rev. **E77**, 046609 (2008).

[104] K. Seto, S. Zhang, J. Koga, H. Nagatomo, M. Nakai, and K. Mima, Prog. Theor. Exp. Phys. **2014**, 043A01 (2014).

[105] A. Carati, A Lagrangian formulation for the Abraham-Lorentz-Dirac equation, in *Symmetry and Perturbation Theory* (Proceedings edited by D. Bambusi and G. Gaeta) Consiglio Nazionale delle Ricerche as "Quaderno GNFM-CNR, n.54", Roma, (1998).

[106] P. M. V. B. Barone and A. C. R. Mendes, Phys. Lett. **A364**, 438 (2007).

[107] V. G. Kupriyanov, Int. J. Theor. Phys. **45**, 1129 (2006).

[108] H. Dekker, Phys. Rep. **80**, 1 (1981).

[109] P. Caldirola, Nuovo Cimento. **18**, 393 (1941).

[110] E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).

[111] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 (1931).

[112] H. Feshbach and Y. Tikochinsky, Trans. N.Y. Acad. Sci., Ser. II **38**, 44 (1977).

[113] R. Banerjee and P. Mukherjee, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 5591 (2002).

[114] M. V. Ostrogradsky, Mem. Acad. St. Petersbourg **VI 4**, 385 (1850).

[115] R. P. Woodard, Lect. Notes Phys. **720**, 403 (2007).

[116] R. P. Woodard, arXiv:hep-th/1506.02210 (2015).