論文の内容の要旨

氏名：鈴　木　隆　史
博士の専攻分野の名称：博士（理学）
論文題名：剛性を持つ粒子のツイスター形式

1．序論

1986 年に Pisarski は，剛性を持つ粒子模型と呼ばれる相対論的な点粒子の模型を提案し，この模型から漸近的自由性が導かれることを示した．この模型の作用積分は，点粒子が描く世界線の外曲率を $K = K(l)$ (l は世界線の弧長パラメーター) とするとき，次式で与えられる:

$$\mathcal{S} := \int_{l_0}^{l_1} dl(-m - kK)\,. \tag{1}$$

ここで，m は質量パラメーターであり，k は無次元の定数である．式 (1) で記述される粒子は，$m = 0$ のとき剛性を持つ無質量粒子と呼ばれ，$m \neq 0$ のとき剛性を持つ有質量粒子と呼ばれる．Pisarski が剛性を持つ粒子模型を提唱した後，その古典および量子力学的性質が Plyushchay によって調べられた．量子化においては，運動量変数と内部座標を引数に持つ波動関数が導かれ，剛性を持つ粒子模型がスピンを持つ粒子を記述することが明らかにされた．特に，剛性を持つ無質量粒子のスピン (ヘリシティー) 量子数は整数と半整数の何れもが許され，剛性を持つ有質量粒子のスピン量子数は整数のみに限られることが示された．しかし，Plyushchay が行った先行研究では，４次元時空における場とそれが満たす場の方程式が導かれておらず，それらの導出は課題として残されている．また近年，Deriglazov と Nersessian によって剛性を持つ有質量粒子が再考察され，スピン量子数が 1/2 になる可能性が指摘された．このように，有質量粒子の場合には相反する２つの報告があるため，どちらが正しいのかを明確にする必要がある．

以上の事柄を背景として，本論文では見通しの良い議論を展開するために，式 (1) にある剛性を持つ粒子模型の作用積分をツイスター変数を用いて書き換え，剛性を持つ粒子のツイスター形式を構築する．また，この形式に基づいて剛性を持つ粒子の古典力学と量子力学を考察し，粒子のスピン量子数が取り得る値を求め，先行研究で求められた値と比較する．さらに，ツイスター理論の技法を適用して，剛性を持つ粒子の波動関数から４次元時空におけるスピナー場と導き，それが場の方程式を満たすことを確認する．加えて，剛性を持つ粒子模型の一種を変形することにより，ローレンツ・ディラック方程式（放射反作用を受ける荷電粒子の運動方程式）を与える２種類のラグランジアンを構成する．

2．スピンを持つ無質量粒子の正準形式と量子化

本章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を議論するのに先立ち，ツイスター変数 Z^A $(A = 0, 1, 2, 3)$ で書かれたスピンを持つ無質量粒子の作用積分（ゲージ化された白藤作用）

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[\frac{i}{2} \left(\bar{Z}_A \dot{Z}^A - Z^A \dot{\bar{Z}}_A \right) + e \left(\bar{Z}_A Z^A - 2k \right) \right] \tag{2}$$

を時空座標とスピナー変数を用いて書き換え，それを基に無質量粒子の正準形式を構築し正準量子化を行う．ここで，e は補助変数，k は無次元の実定数であり，τ は世界線のパラメーターである．式 (2) を e で変分すると，ツイスター変数で書かれた粒子のスピン (ヘリシティー) を表す量 $\frac{1}{2}\bar{Z}_A Z^A$ が k に定まることがわかる．時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ $(\alpha = 0, 1; \dot{\alpha} = \dot{0}, \dot{1})$ とスピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}$, ψ^{α} を用いると，Z^A は $Z^A = (ix^{\alpha\dot{\alpha}}\pi_{\dot{\alpha}} + \psi^{\alpha}, \pi_{\dot{\alpha}})$ と表される．これを式 (2) に代入して S を書き換え，それに基づく正準形式をディラックの手法に従って構築する．その際，得られた拘束条件の一部はディラック括弧を定義して正準変数を減らすことで処理する．

正準量子化は，正準変数を対応する演算子に置き換え，ディラック括弧から定まる交換関係を設定することで実行される．このとき未処理の拘束条件は物理的状態を定義する条件式として読み替えられる．この条件式からスピナーの添字を持つ平面波解 $\varPhi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x, \bar{\pi}, \pi)$ が得られ，同時にスピン量子数の値が整数または半整数に制限される．この解に関数 $\tilde{F}(\bar{\pi}, \pi)$ をかけて $\bar{\pi}_{\alpha}$ と $\pi_{\dot{\alpha}}$ で積分すると，一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場 $\varPsi_{\alpha_1 \ldots \alpha_p \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_q}(x)$ が求まる．また，$\tilde{F}$ のフーリエ・ラ

プラス変換を考えると，$\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ をツイスター関数 $F(Z)$ のペンローズ変換として表すことができる．

３．剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式

本章では，剛性を持つ無質量粒子のツイスター形式を導き，その作用積分が式 (2) の作用積分に一致することを証明する．そのために，まず剛性を持つ無質量粒子のラグランジアン $L_0 := -|k|K$ と等価な１次形式のラグランジアンを与える．その後，このラグランジアンから得られる拘束条件を２成分スピナー $\pi_{\dot{\alpha}}$ と ψ^{α} を用いて解く．得られた解を１次形式のラグランジアンに代入し，多少の式変形を行うと，時空座標 $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ とスピナー変数 $\pi_{\dot{\alpha}}, \psi^{\alpha}$ を用いて書かれた簡潔なラグランジアンが導かれる．さらに，このラグランジアンをツイスター変数 Z^A を用いて書き換えることで，ツイスター変数で表現された剛性を持つ無質量粒子のラグランジアンが求まる．こうして得られたラグランジアンから定まる作用積分は，式 (2) の作用積分に一致する．

ツイスター変数で表現されたラグランジアンを起点として，第２章と同様の手順で量子化を行うと，拘束条件を満たす次数 $-2k-2$ のツイスター関数 $F(Z)$ が得られる．関数 $F(Z)$ は量子論における波動関数に相当するため１価性を課すと，次数 $-2k-2$ は整数に制限され，スピン量子数の値は整数または半整数に定まる．この値は，Plyushchay が先行研究で導いたスピン量子数の値に一致している．また，$F(Z)$ のペンローズ変換として一般化されたワイル方程式を満たすスピナー場 $\Psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ が求まる．Plyushchay はこのようなスピナー場を導くには至らなかったが，本研究ではツイスター理論の手法を適用してスピナー場を導くことができた．

４．剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式

本章では，第３章と同様の手順で剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を導き，それを基に剛性を持つ有質量粒子の古典力学と量子力学を論じる．まず，剛性を持つ有質量粒子のラグランジアン $L_m := -m - |k|K$ と等価な１次形式のラグランジアンを与え，これから得られる拘束条件を運動量スピナー $\pi_{i\dot{\alpha}}\,(i = 1, 2)$ を用いて解く．この解を１次形式のラグランジアンに代入し，$x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\pi_{1\dot{\alpha}}$ から成るツイスター変数 Z_1^A および $x^{\alpha\dot{\alpha}}$ と $\pi_{2\dot{\alpha}}$ から成るツイスター変数 Z_2^A を用いて書き換えると，ツイスター変数で表現された剛性を持つ有質量粒子のラグランジアンが導かれる．このように，有質量粒子の場合に２個のツイスター変数が必要になることは，従来の関連する研究と整合している．

ツイスター変数で表現されたラグランジアンを基に剛性を持つ有質量粒子の正準量子化を行うと，Z_1^A と Z_2^A それぞれについて次数 $-2s-2$ のツイスター関数 $F(Z_i)$ が得られる．これに１価性を課すと次数 $-2s-2$ は整数に制限される．また，$F(Z_i)$ のペンローズ変換を行うと，一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式を満たすスピナー場 $\Psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p\,;\,j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ が得られる．実際に考察を進めると，スピナー添字 α の個数 p とスピナー添字 $\dot{\alpha}$ の個数 q，そして粒子がもつスピンの大きさの量子数 J との間に $J = (p+q)/2$ が成り立つことが証明できる．この式と，$F(Z_i)$ が Z_1^A と Z_2^A それぞれについて同じ次数 $-2s-2$ であることを用いると，J が取り得る値は非負整数に制限されることがわかる．このことから，粒子のスピン量子数が半整数になる可能性は否定され，Plyushchay の結論を支持する結果が得られる．また，パウリ・ルバンスキーベクターを解析することで，粒子の質量 M は J に依存して $M = m/\sqrt{1 + J(J+1)/k^2}$ のように定まることがわかる．

５．ローレンツ・ディラック方程式のラグランジュ形式

Plyushchay は上述の L_m をラグランジアンとして採用したが，外曲率の２乗を含む $\tilde{L}_m := -m - |k|K^2$ をラグランジアンとする模型も他の研究者により考察されている．本章では，$\tilde{L}_m$ を変形し，それに外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える２種類のラグランジアンを構成する．これらのうちの１つは世界線のパラメーターにあらわに依存する減衰項を含んでおり，他の１つは世界線のパラメーターにあらわに依存しない，２つの力学変数から成る交差項を含んでいる．実際に，それぞれのラグランジアンから，ソース項を持つローレンツ・ディラック方程式がオイラー・ラグランジュ方程式として導かれる．これらのラグランジアンが得られたことで，放射反作用を受ける粒子の解析力学が構築できると共に，放射反作用の量子論に対する新たなアプローチが可能になると考えられる．

６．結論

本論文では，剛性を持つ無質量粒子と剛性を持つ有質量粒子のツイスター形式を構築し，それに基づく量子化の議論を通じて粒子のスピン量子数が取り得る値を求めた．得られた値は Plyushchay が先行研究で求めた値に等しく，Deriglazov と Nersessian による最近の報告を否定するものになっている．本論文ではツイスター理論の枠組みで全ての拘束条件を矛盾無く扱っており，得られたスピン量子数の値（すなわち Plyushchay が求めた値）は正しいものと言える．また，剛性をもつ粒子の波動関数（ツイスター関数）のペンローズ変換を行うことで４次元時空におけるスピナー場を導出し，それが場の方程式（無質量粒子の場合は一般化されたワイル方程式，有質量粒子の場合は一般化されたディラック・フィールツ・パウリ方程式）を満たすことを確認した．加えて，剛性を持つ粒子の研究の派生として，外曲率の２乗を含むラグランジアンを変形し外部電磁場との結合項を加えることで，ローレンツ・ディラック方程式を与える２種類のラグランジアンを構成した．

今後の課題として，オストログラドスキーの定理の視点から剛性を持つ粒子模型を考察し，この模型におけるエネルギー的な不安定性の有無を確認することが挙げられる．