論文の内容の要旨

氏名：岡　野　　諭
博士の専攻分野の名称：博士（理学）
論文題名：Twistor formulation of a massive spinning particle （スピンをもつ有質量粒子のツイスター形式）

１．序論

本研究の基礎となるツイスター理論は，相対論的量子力学の再定式化と量子重力理論の構築を目指して，1967 年に Penrose によって提唱された．この理論では，ツイスターと呼ばれる４つの複素数の組が時空座標に代わる基本的な量であり，ツイスターの集合であるツイスター空間（４次元複素空間）が物理法則の定式化の舞台となる．ツイスターを用いる利点としては，共形共変性が明白な形で無質量系を取り扱えることや，スピンをもつ無質量粒子の古典力学的な記述が可能となること等が挙げられる．このように，ツイスター理論は無質量系を扱う上で大変有効な枠組みである．

ツイスター理論は，無質量粒子のみならず，有質量粒子の記述にも適用できる．有質量粒子に対しては２つ以上のツイスターが導入されるが，それに伴って有質量粒子系にはツイスター間に成立する新たな対称性が現れる．Penrose らは 1970 年代の後半に，この対称性を素粒子の内部対称性に同一視することを提案した．しかし，彼らの提案に関しては力学的な視点からの考察がなされておらず，検討すべき事柄が残されている．一方，最近に至るまで，ツイスターで表される有質量粒子の作用積分を与え，それに基づきスピンをもつ有質量粒子の古典力学を定式化する試みが行われている．しかし，これまでの研究で与えられた作用積分には，ツイスターに関する拘束条件が人為的に付加されており，満足なものとは言い難い．この点を改善するように，有質量粒子の作用積分にツイスターに関する適切な拘束条件を系統的に取り入れることは，重要な課題の１つである．

本論文では，最初にツイスターを用いた有質量粒子の記述を説明し，関連する１つの定理を証明する．次に，スピンをもつ有質量粒子の作用積分を構成するにあたり，ゲージ原理に基づいて必要十分な拘束条件を系統的に取り入れる．続いて，得られた作用積分を基にして正準量子化を実行し，その結果を吟味することでツイスター間の内部対称性の物理的意味を明らかにする．また，相互作用の導入を目指し，ツイスター変数の代わりに時空座標とスピナー変数を力学変数に選んで同様の考察を行う．

２．ツイスター理論における有質量粒子の記述

この章では，ツイスターを用いた有質量粒子の記述を説明し，関連する１つの定理を証明する．

ツイスター Z^A は２つの２成分スピナー $\omega^\alpha\,(\alpha = 0,1)$ と $\pi_{\dot\alpha}\,(\dot\alpha = \dot 0,\dot 1)$ から成る４つの複素数の組 $Z^A = (\omega^\alpha, \pi_{\dot\alpha})$ である．Penrose らは有質量粒子を記述するために，$n\,(\geq 2)$ 個のツイスター $Z_i^A = (\omega_i^\alpha, \pi_{i\dot\alpha})\,(i = 1, \ldots, n)$ を導入し，スピナー $\pi_{i\dot\alpha}$ とその複素共役 $\bar\pi_\alpha^i$ から，粒子の４元運動量を $p_{\alpha\dot\alpha} \equiv \sum_{i=1}^n \bar\pi_\alpha^i \pi_{i\dot\alpha} = \bar\pi_\alpha^i \pi_{i\dot\alpha}$ と定義した．これはユニタリー変換 $\pi_{i\dot\alpha} \to U_i{}^j \pi_{j\dot\alpha}$ のもとで不変であり，有質量粒子系にはこの不変性に由来する $SU(n)$ 対称性が現れる．Penrose らはこの対称性を素粒子の内部対称性に同一視することを提案した．

本研究では「特別なユニタリー変換 $\pi_{i\dot\alpha} \to \tilde U_i{}^j \pi_{j\dot\alpha}$ を行うと，$n \geq 3$ の場合の $p_{\alpha\dot\alpha}$ の表式が $n = 1$ または $n = 2$ の場合の表式に帰着する」という定理を証明した．特に $n = 1$ の場合は無質量粒子を記述するため，この定理から有質量粒子は実質上２個のツイスターで記述されることがわかる．

３．スピンをもつ有質量粒子のツイスター形式

この章では，1983 年に白藤が与えたスピンをもつ無質量粒子の作用積分を有質量粒子に対して拡張し，これをゲージ原理に基づいて修正することで，適切な拘束条件を与える作用積分を構成する．

白藤が与えた作用積分を有質量粒子に対して拡張したものは，$S_m = \int d\tau \big[i\bar Z_A^i \dot Z_i^A + h\big(\epsilon^{ij}\pi_{i\dot\alpha}\pi_j^{\dot\alpha} - \sqrt{2}me^{i\varphi}\big) + \bar h\big(\epsilon_{ij}\bar\pi_\alpha^i \bar\pi^{j\alpha} - \sqrt{2}me^{-i\varphi}\big)\big]\ (i = 1, 2)$ で与えられる．ここで τ は粒子が描く世界線のパラメータ，$\bar Z_A^i$ は Z_i^A の複素共役，$h, \bar h, \varphi$ は補助変数，m は質量パラメータ，ϵ^{ij} と ϵ_{ij} は Levi-Civita 記号である．作用積分 S_m を h で変分することで，質量殻条件 $\pi_{1\dot\alpha}\pi_2^{\dot\alpha} = me^{i\varphi}/\sqrt{2}$ が得られる．作用積

分 S_m は，大域的 $U(1)$ 変換 $Z_i^A \to \mathrm{e}^{i\theta} Z_i^A$（$\theta$: 実定数）と大域的 $SU(2)$ 変換 $Z_i^A \to U_i{}^j Z_j^A$（U: 2×2 ユニタリー定数行列）のもとで不変である．

次に，S_m にゲージ原理を適用して，τ に依存する局所的 $U(1)$ 変換 $Z_i^A \to \mathrm{e}^{i\theta(\tau)} Z_i^A$ と局所的 $SU(2)$ 変換 $Z_i^A \to U_i{}^j(\tau) Z_j^A$ のもとで不変な作用を構成する．具体的には，$U(1)$ ゲージ場 $a(\tau)$ と $SU(2)$ ゲージ場 $b(\tau)$ を導入し，S_m に含まれる τ 微分を a と b を含む共変微分に置き換え，さらに a に関する 1 次元 Chern-Simons 項を加える．しかし，こうして得られた作用積分は，実際にはスピンをもたない有質量粒子のみを記述することがわかる．そこで，スピンをもつ有質量粒子を記述するため，局所的 $SU(2)$ 対称性が非線形に実現するように作用積分を修正する．そのために，商空間 $SU(2)/U(1)_{\mathsf{b}}$ [$U(1)_{\mathsf{b}}$ は $SU(2)$ の部分群である $U(1)$] とその代表元 V を考えて，新たな力学変数 $\mathsf{Z}_i^A \equiv (\varrho_i^\alpha, \varpi_{i\dot\alpha}) := V^\dagger{}_i{}^j Z_j^A$, $\bar{\mathsf{Z}}_A^i \equiv (\bar\varpi_\alpha^i, \bar\varrho^{i\dot\alpha}) := \bar Z_A^j V_j{}^i$, $\mathsf{b} = \sum_{r=1}^3 \mathsf{b}^r \sigma_r := V^\dagger b V - i\dot V^\dagger V$ (σ_r は Pauli 行列) を定義する．これらの変数を用い，局所的 $U(1)$ 変換，局所的 $SU(2)$ 変換，パラメータ τ の付け替えの 3 つの変換のもとで不変な項を全て加えることで，次のような修正された作用積分を定める．

$$S = \int d\tau \Big[i\bar{\mathsf{Z}}_A^i \dot{\mathsf{Z}}_i^A + a\big(\bar{\mathsf{Z}}_A^i \mathsf{Z}_i^A - 2s\big) + \mathsf{b}^3\big(\bar{\mathsf{Z}}_A^i \sigma_{3i}{}^j \mathsf{Z}_j^A - 2t\big) - k\sqrt{(\mathsf{b}^1)^2 + (\mathsf{b}^2)^2}$$
$$+ h\Big(\epsilon^{ij}\varpi_{i\dot\alpha}\varpi_j^{\dot\alpha} - \sqrt{2}me^{i\varphi}\Big) + \bar h\Big(\epsilon_{ij}\bar\varpi_\alpha^i \bar\varpi^{j\alpha} - \sqrt{2}me^{-i\varphi}\Big)\Big]. \qquad (1)$$

ここで，s, t, k は実定数である．作用積分 S を a と b^r に関して変分することで，必要な拘束条件が得られ，実際に S はスピンをもつ有質量粒子を記述することがわかる．

４．スピンをもつ有質量粒子の正準形式とその正準量子化

この章では，式 (1) の作用積分 S を基にスピンをもつ有質量粒子の正準形式を考察し，有質量粒子系の量子化を実行する．また，ツイスター間の $SU(2)$ 対称性の物理的意味を明らかにする．

先ず，作用積分 S が与える第 1 次拘束条件とその時間発展である第 2 次拘束条件を Dirac の手法に従って第 1 類と第 2 類に分類する．その後，第 2 類拘束条件は Dirac 括弧を定めることで強い拘束条件として処理し，第 1 類拘束条件は弱い拘束条件として維持する．

正準量子化の手続きは，正準変数を対応する演算子に置き換え，Dirac 括弧から定まる交換関係を設定することで実行される．このとき，第 1 類拘束条件は物理的状態を定める条件式に読み替えられる．正準座標演算子を対角化する表示を取ることで，物理的状態を定める条件式は Z_i^A の正則関数 $F(\mathsf{Z})$ が満たす連立偏微分方程式として表現される．これらの方程式は，$F(\mathsf{Z})$ を同時固有関数，実数 m, s, t, k を固有値とする一連の固有値方程式である．関数 $F(\mathsf{Z})$ は量子論の波動関数に相当するから一価性を課すのが自然であり，その結果 s, t, k の値は特定の値に限定される．また，$F(\mathsf{Z})$ を Penrose 変換することにより，Minkowski 空間におけるスピナー場 $\Psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p; j_1\ldots j_q, \dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x)$ が得られる．質量殻固有値方程式を用いると，$\Psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p; j_1\ldots j_q, \dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x)$ は $SU(2)$ 添字をもつ一般化された Dirac-Fierz-Pauli (DFP) 方程式を満たすことがわかる．

次に，ツイスター間の $SU(2)$ 対称性の物理的意味を探るため，1 階のスピナー場 $\Psi_\alpha^i(x)$ と $\Psi_{i\dot\alpha}(x)$ に注目する．これらが満たす一般化された DFP 方程式は，粒子に対する Dirac 方程式と反粒子に対する Dirac 方程式に他ならず，それらは $SU(2)$ 添字 i の値 ($i = 1, 2$) で区別される．これは，$SU(2)$ 2 重項が粒子と反粒子から成る 2 重項であることを意味しており，従って $SU(2)$ 対称性は粒子と反粒子の間の連続対称性と理解できる．スピナー場 $\Psi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p; j_1\ldots j_q, \dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_q}(x)$ のスピナー添字の数と $SU(2)$ 添字の数が一致しているため，スピナー場としての階数が高くなると，それに伴い $SU(2)$ 多重項を成すスピナー場の数も多くなる．この性質と，$SU(2)$ 2 重項が粒子と反粒子の 2 重項であることを考慮すると，高階のスピナー場は，複数個の粒子と反粒子から成る多重項を構成することがわかる．

５．スピンをもつ有質量粒子のスピナー形式とその正準量子化

この章では，作用積分 S を時空座標とスピナー変数で書き表し，それを基に正準量子化を実行する．

ツイスター Z_i^A は，時空座標 $x^{\alpha\dot\alpha}$ とスピン自由度を表すスピナー変数 ψ_i^α を用いて $\mathsf{Z}_i^A = (ix^{\alpha\dot\alpha}\varpi_{i\dot\alpha} + \psi_i^\alpha, \varpi_{i\dot\alpha})$ と表すことができる．これを式 (1) に代入することで S を書き直し，それを基に正準量子化を実行する．その際，波動関数が $x^{\alpha\dot\alpha}$, $\varpi_{i\dot\alpha}$, $\bar\varpi_\alpha^i$ の関数になるような表示を採用し，第 4 章と同様の手

順を踏み議論を進める．結果として，物理的状態を定める条件は，波動関数 $\varPhi(x,\varpi,\bar{\varpi})$ に対する連立偏微分方程式に読み替えられる．これを解くことで，平面波型のスピナー波動関数 $\varPhi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p;j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ が得られ，同時に実定数 s,t,k の値が第 4 章で得た値と同じ値に定まる．この形式では，スピナー場 $\varPsi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p;j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}(x)$ は $\varPhi^{i_1\ldots i_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p;j_1\ldots j_q,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_q}$ の重ね合わせとして定義される．この章で論じた形式は，ツイスターを基本変数とする形式に比べて，相互作用の導入に適していると考えられる．

６．まとめと今後の課題

本論文では，初めにツイスターを用いた有質量粒子の記述を論じ，有質量粒子は実質上 2 個のツイスターで記述されることを証明した．次に，白藤が与えた作用積分を有質量粒子に対して拡張し，それをゲージ原理に基づいて変更した．さらにスピンを持つ有質量粒子を記述できるように，$SU(2)$ の非線形実現を用いて作用積分を修正した．これにより，従前の研究と異なり，必要十分な拘束条件を系統的に取り入れることが可能になった．量子化は，先ずツイスターを力学変数とする形式で実行し，実定数 s,t,k の値が特定の値に限定されることを示した．また，Penrose 変換により得られるスピナー場が，一般化された DFP 方程式を満たすことを示した．加えて，1 階のスピナー場とそれが満たす DFP 方程式を考察することで，作用積分がもつ $SU(2)$ 対称性が粒子と反粒子の間の対称性であることを明らかにした．最後に，時空座標とスピナー変数を力学変数とする形式で量子化を実行し，ツイスターを力学変数とした場合との整合性を確認した．

今後の課題として，本研究に基づき粒子間の相互作用や外場との相互作用を考察することや，質量殻条件をゲージ原理から導出することなどが挙げられる．