

## 論文の内容の要旨

氏名：神 田 直 大

博士の専攻分野の名称：博士 (理学)

論文題名：衝撃波型背景時空における Bi-local 場

### 1. 導入

超高エネルギー領域での粒子の相互作用は、低エネルギーの物理にはない興味深い特徴が現れ、プランクエネルギーに近い粒子間の相互作用においては重力もまた効果的な役割を果たす。近年注目されている衝撃波型重力による粒子の散乱過程の問題は、このような認識の下に 1985 年に T. Dray と G. 't Hooft によって行われた議論に始まる。一般に、超高エネルギーの粒子は、静止質量が無視できるため、光速で運動する粒子として振舞う。1971 年に P. C. Aichelburg と R. U. Sexl は、このような粒子が衝撃波型重力の源になることを厳密に示し、't Hooft の議論はこの結果に基づいている。このような観点に立った、超高エネルギーの粒子を源とする衝撃波型重力場と入射粒子の散乱過程の解析は、入射粒子を古典粒子、場の理論で記述される粒子、また弦理論で記述される粒子等の多くの研究がある。重力場は時空の歪みで表現される為、衝撃波型重力による散乱は、衝撃波型背景時空の下での粒子散乱と捉えることもできる。この時空構造と弦理論を含む時空の極限である pp-wave 背景との類似性から、衝撃波型重力による散乱過程の研究は、4 次元のゲージ場力と余剰次元の重力を結びつける AdS 双対ゲージ理論の立場からも興味を持たれている。

さて、衝撃波型重力による散乱過程の研究の多くは、局所場に対応する入射粒子を想定している。弦理論での試みも、弦の散乱自体は調べられていない。本研究の目的は、弦に類似した構造を持ち、力学的により簡単な bi-local 場を取り上げ、この場の衝撃波型重力による散乱を調べることである。bi-local 場は、1948 年に湯川によって提唱された非局所場の理論の一つであり、その力学的背景である bi-local 場模型は相対論的な 2 粒子の束縛状態を記述する有効な手段となっている。bi-local 場模型は、弦模型に比べ時空次元への制限がないものの、模型が粒子間の遠隔力を含むため、曲がった時空での定式化は、従来試みられていなかった。本論文の目的は、bi-local 場模型を衝撃波型背景時空を含む曲がった時空で定式化し、これに基づく散乱過程を解析して、散乱における非局所構造の効果を調べることである。

### 2. 衝撃波型背景時空

衝撃波型背景時空とは、光的座標

$$x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3), \quad x^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3),$$

$$x_{\perp} = (x^1, x^2),$$

の下で、図 1 に対応する計量

$$ds^2 = -2dx^+dx^- + f(x_{\perp})\delta(x^-)d^2x^- + d^2x_{\perp} \quad (1)$$

を持つ時空を表す。この時空構造は、時空を決定するエネルギー・運動量テンソルが  $T_{--}$  成分のみを持ち、その他

の成分はすべてゼロになる場合に生成される。 $T_{--}$  が光的な運動をする粒子に起因する場合、 $f(x_{(i)\perp})$  は Einstein の重力場方程式から

$$f(x_{(i)\perp}) = f_0 - 2Q \log\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x_{\perp}^2}, \quad (2)$$

$$Q = \frac{4\sqrt{2}E_S}{E_P^2}, \quad E_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \simeq 1.22 \times 10^{28} \text{eV},$$

の形に求まる。ここで  $f_0, r_0$  は  $f_0 = f(r_0)$  で結ばれる定数である。また  $E_S$  は重力源となる粒子の持つエネルギーであり、 $E_P$  はプランクエネルギーである。 $E_S$  がプランクエネルギー程度 ( $E_S \sim E_P$ ) であ

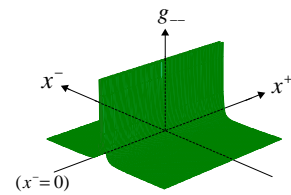


図 1  $\bar{x}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3)$  方向に特異性を持つ衝撃波型背景計量

るとき,  $Q$  はおよそ  $Q \sim E_P^{-1}$  程度の量である。

### 3. Bi-local 場模型 (Minkowski 時空)

Minkowski 時空では, bi-local 場模型に対応する 2 粒子系の作用を容易に構成することができる。粒子間の相互作用を図 2 の様な  $V_0(\bar{x}) = \kappa^2 \bar{x}^2 + \omega$ , ( $\kappa, \omega = \text{const.}$ ) に設定すると, 模型に特徴的な拘束条件

$$H = P^2 + 4(\bar{p}^2 + \kappa^2 \bar{x}^2) + \omega = 0, \quad (3)$$

$$T = P \cdot \bar{p} = 0, \quad (4)$$

が導かれる。ここで,  $\bar{x}$  と  $\bar{p}$  は 2 粒子系の相対座標と相対運動量であり  $P$  は重心運動量を表す。量子化

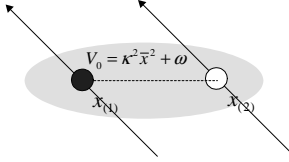


図 2  $\bar{x}$  に比例する力で相互作用する 2 粒子

された系においては, (3) は bi-local 場の波動方程式に, また (4) を期待値の意味で理解した形の条件が, 理論の因果律やユニタリな時間発展を保障する物理的補助条件となっている。これらの条件の下で, bi-local 場模型はハドロン現象をよく記述する相対論的二体問題の理論となっている。

### 4. Bi-local 場模型 (曲がった時空)

次に, 計量  $g_{\mu\nu}$  で特徴付けられる曲がった時空に bi-local 場模型を埋め込むことを考える。(3), (4) に対応する拘束条件を導く曲がった時空における相対論的二粒子系の作用を

$$S = \int d\tau \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left\{ e_{(i)}^{-1}(\tau) g_{\mu\nu} \frac{dx_{(i)}^\mu}{d\tau} \frac{dx_{(i)}^\nu}{d\tau} - V(x_{(1)}, x_{(2)}) e_{(i)}(\tau) \right\} \quad (5)$$

と与える。ここで  $e_i(\tau)$ , ( $i = 1, 2$ ) は, 各粒子の時間パラメータの任意性を保障するゲージ変数であり, (3), (4) に対応する条件を導く仕組みを与える。また, 相互作用  $V(x_{(1)}, x_{(2)})$  はスカラー量であり, 二粒子の座標に依存する bi-scalar 量である。Minkowski 時空において  $V(x_{(1)}, x_{(2)})$  が通常の bi-local 場模型の相互作用項に帰着するという条件の下で,

$$V(x_{(1)}, x_{(2)}) = 2\kappa^2 \sigma(x_{(1)}, x_{(2)}) + \omega \quad (6)$$

とおく。ここで  $\sigma(x_{(1)}, x_{(2)})$  は, DeWitt により与えられた測地的距離の二乗の  $1/2$  というべき量であり, Minkowski 時空において  $\frac{1}{2} \bar{x}^2$  に帰着する (図 3)。これに応じて,  $e_{(i)}(\tau)$  の任意性から導かれる拘束条件  $H_i = 0$ , ( $i = 1, 2$ ) と読み換えた形が (3), (4) に帰着し, (5) が曲がった時空における bi-local 場模型を記述する作用として必要な条件を満たしていることが分かる。

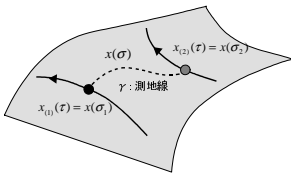


図 3 曲がった時空に埋め込まれた測地線

$\gamma$  に沿って相互作用する 2 粒子

### 5. 時空の特異性を取り除く正準変換

衝撃波型重力の計量が  $\delta$ -関数型の特異点を持っていたことに由来し, 導かれた拘束条件の中にも  $\delta$ -関数型の特異点が含まれている。この特異点を取り除いておいた方が扱いやすい。この特異性は

$$U \equiv \exp \left[ -i \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^2 f(x_{(i)\perp}) p_{(i)}^- \theta(x_{(i)}^-) \right\} \right] \quad (7)$$

の形の正準変換の演算子を用いて,

$$\tilde{H}_i = U H_i U^\dagger, \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

とおくことにより取り除くことができる。\$U\$ は \$x\_{(i)}^-\$ を通して時間に依存するため大域的な変換ではなく、相互作用の一部を正準変換の演算子に移した意味を持ち、\$S\$-行列の計算においては自明でない役割を果たす。拘束条件 (8) を \$\tilde{H} = 4(\tilde{H}\_1 + \tilde{H}\_2)\$, \$\tilde{T} = \tilde{H}\_1 - \tilde{H}\_2\$ と書き換えると

$$\tilde{H} = 4 \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \{-2p^+ p^- + (p_\perp - A\theta p^-)^2\}_{(i)} + \tilde{V} \right), \quad (9)$$

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} \{-2p^+ p^- + (p_\perp - A\theta p^-)^2\}_{(i)}, \quad (10)$$

を得る。ここで \$A(x\_\perp) = -\frac{1}{2}(\partial\_\perp f(x\_\perp)) = Q \frac{x\_\perp}{r^2}\$ であり、\$A(x\_\perp)\$ は変換後の相互作用項にとり残された、単極子型の特異項である。論文のはじめに述べたように \$Q\$ はプランクエネルギー \$E\_P\$ の逆数程度であり、また衝撃波型重力下にある強い束縛状態の効果を調べる狙いで、以下では \$\kappa \lesssim E\_P\$ を仮定する。この時 (9), (10) に \$Q^2 \simeq 0\$, \$Q/\kappa \simeq 0\$ という近似を行うことは妥当であり、結果として

$$\tilde{H} = P^2 + 4(\bar{p}^2 + \kappa^2 \bar{x}^2) + \omega + \Delta M^2, \quad \left( \Delta M^2 = -2 \sum_{i=1}^2 (\{p_\perp, A\} \theta p^-)_{(i)} \right), \quad (11)$$

$$\tilde{T} = P \cdot \bar{p}, \quad (12)$$

が得られる。

## 6. 衝撃波型背景時空での bi-local 場模型の散乱振幅

衝撃波型重力下での bi-local 場模型の散乱問題は、波動方程式 (11) により取り扱うことができる。その際のより便利な方法は、\$T^- = X^-\$ というように光的時間とその共役運動量である \$P^+ = i \frac{\partial}{\partial T^-}\$ を用いることである。このような表示の下、波動方程式 (11) は

$$i \frac{\partial}{\partial T^-} |\tilde{\Phi}(T^-)\rangle = (\tilde{H}_0 + \Delta \tilde{H}) |\tilde{\Phi}(T^-)\rangle \quad (13)$$

と、Schrödinger 型の方程式に表せる。ここで

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2\alpha' P^-} \{ \alpha' (P_\perp^2 + m_0^2) + a^\dagger \cdot a \}, \quad \left( \alpha' = \frac{1}{8\kappa} \right), \quad (14)$$

$$\Delta \tilde{H} = \frac{1}{2P^-} [\Delta M^2] \simeq \frac{i}{2} [\tilde{H}_0, \sum_{i=1}^2 f_i] P^- \theta(X^-), \quad (15)$$

であり、\$(a\_\mu, a\_\mu^\dagger)\$ は \$(\bar{x}\_\mu, \bar{p}\_\mu)\$ から作られる 4 次元調和振動子の演算子である。ただしこの様な振動子の導入は、時間方向の励起によりゴースト状態が生じる。\$\tilde{T} = 0\$ はこれを除く条件であるが、\$\tilde{H} = 0\$ と閉じた拘束条件を形成しない為、これを自明に成立させる物理的変数による記述に移る必要がある。量子化された系において、これは補助条件と両立するように射影操作を行うことであり、その結果を \$[\dots]\$ で表した。以上の準備の下で、\$\Phi (= U^\dagger \tilde{\Phi})\$ 空間における \$S\$-行列が

$$S = \lim_{\substack{T_2^- \rightarrow +\infty \\ T_1^- \rightarrow -\infty}} U_2^\dagger \left( \hat{T} e^{-i \int_{T_1^-}^{T_2^-} dT^- (\Delta \tilde{H})_D} \right) U_1, \quad (\Delta \tilde{H})_D = e^{i \tilde{H}_0 T^-} \Delta \tilde{H} e^{-i \tilde{H}_0 T^-} \quad (16)$$

と求められる。ここで \$\hat{T}\$ は \$T^-\$ についての時間順序演算子である。(13) の下で \$P^-\$ が保存量であることから、散乱の \$T\$-行列は

$$\langle \Phi_b | S | \Phi_a \rangle = \langle \Phi_b | \Phi_a \rangle + i(2\pi) \delta(P_b^- - P_a^-) T_{ba} \quad (17)$$

により定義され、その具体形は \$(\Delta \tilde{H})\_D\$ についての摂動論により求められる。注意すべきは、\$(\Delta \tilde{H})\_D\$ の 0 次においても、\$U\_i\$ の中に相互作用の一部が含まれていることである。そこで先ず 0 次の \$T\$-行列を評価する為に、\$|\Phi\rangle = |\phi\_{\text{rel.}}\rangle \otimes |P\rangle\$ として重心運動の状態については \$P\$ 表示をとり、相対運動の状態 \$|\phi\_{\text{rel.}}\rangle\$ については以下の [1] ~ [3] を代表として \$T\$-行列を計算する。

ここで考える状態は、[1] \$|\phi\_a\rangle, |\phi\_b\rangle\$ 共に振動子の基底状態、[2] \$|\phi\_a\rangle = \$ 光的振動子のコヒーレント

状態,  $|\phi_b\rangle =$  基底状態,  $[3] |\phi_a\rangle =$  基底状態,  $|\phi_b\rangle = \bar{x}_\perp$  の固有状態の重ね合わせ, の場合である。それぞれの場について  $T$ -行列を評価した結果は,

$$T_{ba}^{(0)} = \underbrace{\frac{e^{\frac{i}{2}f_0 P_a^-}}{(2\pi)^{3i}} \times r_0^2 \frac{\pi\Gamma(1 - \frac{i}{2}P_a^- Q)}{\Gamma(\frac{i}{2}P_a^- Q)} \left\{ \frac{4}{r_0^2(\Delta P_\perp)^2} \right\}^{1 - \frac{i}{2}P_a^- Q}}_{\text{'t Hooft amplitude}} \left[ 1 - \begin{Bmatrix} O(\alpha' Q P_a^-) \\ O(\alpha'(Q\bar{p}_a^-)^2) \end{Bmatrix} \right] \quad (18)$$

$(\Delta P_\perp = P_{\perp b} - P_{\perp a})$

の様に見えることが分かった。いずれの場合も  $\alpha' \rightarrow 0$  の極限で 't Hooft によって得られていた振幅を再現し, また bi-local 場の非局所性からくる補正は, 't Hooft の振幅に対して  $\alpha' Q P_a^-$  あるいは  $\alpha'(Q\bar{p}_a^-)^2$  倍程度の補正を加えることが分かる。

## 7. まとめと今後の課題

この論文で我々は, 調和振動子型ポテンシャルによる相対論的二体束縛状態である bi-local 場模型と, 光速で運動する点粒子により作られる衝撃波型重力との相互作用による散乱問題を扱い, 散乱過程において束縛状態の効果がどのように反映されるかを調べた。これを行うために, 先ず bi-local 場模型を曲がった時空のもとに埋め込むことを試みた。衝撃波型重力の計量が  $\delta$ -関数型の特異性を持つために, この計量下での bi-local 場模型から導かれる拘束条件も同じ発散を伴う特異性を持ってしまいが, 適切な正準変換を行うことにより, 発散を伴う特異性は取り除かれることが示された。次いで  $O(1/E_p^2)$  以下の微量量を無視する近似を実行し, 考えている模型を, 重力相互作用の一部を外部ポテンシャルとして持つ Minkowski 時空の bi-local 場模型に帰着させることができた。その際, 正準変換のユニタリ演算子が時間に依存する為, 衝撃波型重力の相互作用による状態の遷移において, ユニタリ演算子自体も相互作用の一部を荷うことが明らかとなった。結果として, 得られた bi-local 場模型の波動方程式を基に代表的な始状態と終状態の間でのポテンシャル散乱の  $S$ -行列を評価し, bi-local 場模型が持つ非局所構造の効果を調べた。

具体的には, 代表的な 3 通りの始状態と終状態の間の bi-local 場模型の散乱を計算し, この結果として 't Hooft によって得られていた振幅は, 本論文で用いた正準変換に起因する構造が明らかになった。また bi-local 場模型の非局所効果は 't Hooft が与えた点粒子の振幅に対して,  $\alpha' Q P_a^-$  あるいは  $\alpha'(Q\bar{p}_a^-)^2$  倍程度の補正を加えるものであり, ここで考えている近似の範囲で散乱振幅において大きな効果を与えないことが分かった。

今後の課題として, 拘束条件の取り入れ方や, 近似に依らぬ定式化の検討は重要である。また, 本論文で得られた結果は, むしろ  $\alpha'$  が大きくなる時, 非局所構造が有効に働くことを示唆している。これは infinite slope 極限と呼ばれるものに対応し, 図 4 の様に bi-local 場模型のスピンの異なる状態が同一質量に縮退する高階スピン重力の構造を想起させ, プレーン理論の立場からもこの方向の展開は興味深い。この他に, bi-local 場模型ではなく, バリオンを想定する tri-local 場模型等で行った場合に散乱過程にどのような違いが現れるのかについて調べることも, 重要な課題であると言える。

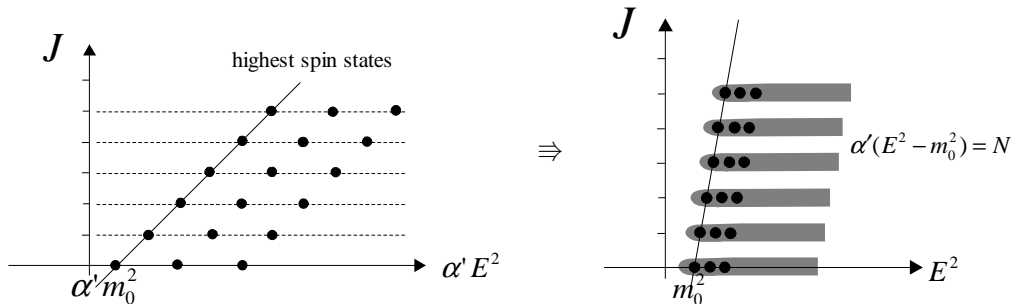


図 4 Infinite slope 極限の模式図