

論文審査の結果の要旨

氏名：沼田 崇宏

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題目：Almost symmetric numerical semigroups with small number of generators

(少ない個数で生成された概対称数値的半群について)

審査委員：（主査） 教授 吉田 健一

（副査） 教授 泊 昌孝

日本工業大学教授 衛 藤 和 文

数値的半群とは0を含む自然数の部分集合で、0を含み、加法に関して閉じていて、十分大きな自然数はすべて含むような部分集合のことを言う。半群論はスペイン、イタリアなどのヨーロッパの国々で盛んに研究されている。一方、体 K と半群 H に対して、半群環 $K[H]$ を考えると、これは1次元の Cohen-Macaulay 整域になり、可換環論の研究対象になる。半群 H と半群環 $K[H]$ の性質は対応している。例えば、Kunz は 1970 年代に H が symmetric (対称的) であることと、 $K[H]$ が Gorenstein 環になることとは同値であることを証明した。これは半群論と可換環論の交流の出発点であると言えるだろう。

Barucci と Froberg は 1997 年に発表した論文において、1次元の Cohen-Macaulay 局所環に対して almost Gorenstein 環の概念を導入し、半群に対して、almost-symmetric (概対称) 性を定義した。その後、almost Gorenstein 環の概念は後藤・松岡・Phuong により修正され、後藤・高橋・谷口により高次元化された。結果として、この概念は半群論からも可換環論からも今後の研究が期待されている。

本論文の研究テーマは almost-symmetric な半群に関する研究である。特に、生成系の少ない場合の almost-symmetric な半群に注目し、可換環論、特に次数付き環のホモロジー代数などを有効に利用する点が大きな特色である。

以下、本論文の主要な結果を解説したい。半群のうち最も簡単な構造を持つのは既約な半群と呼ばれ、前述の symmetric な半群と pseudo-symmetric な半群とがある。これらは共に almost-symmetric な半群とみなすことができる。生成系として一番簡単な場合は 2 元生成の場合である。このときは常に symmetric になることが知られている。

本論文の最初の結果は、 H が 3 元生成の almost-symmetric な半群の特徴付けである。 H が 3 元生成の場合には almost-symmetric な半群と pseudo-symmetric な半群の概念は一致する。半群 H に対して、 $g(H)$, $F(H)$ はそれぞれ H の種数、フロベニウス数を表す。このとき、 $g(H)$ が $F(H)+1$ 以上であることが一般に証明されているが、その差を H の定義イデアルに必要なパラメーターを用いて特徴付けた定理 (Theorem 2.8) が最初の結果である。その系として、pseudo-symmetric な

半群の特徴付けが **Corollary 2.9** として得られているが、シンプルで良い結果である。これらの定理は申請者の沼田氏の他、渡辺敬一元日本大学教授、及び成氏との共同研究の成果として得られた。また、応用として、与えられた偶数の自然数 f に対して 3 元生成 **pseudo-symmetric** な半群 H で $F(H)=f$ となるものの具体的な構成を可能にした点も見逃せない。

2 つ目の研究成果は 4 元生成の **almost-symmetric** な半群 H のタイプに関する結果である。申請者は 4 元生成な **almost-symmetric** な半群 H のタイプ $t(H)$ は 3 以下であると予想した。一般の場合は未解決のままであるが、**almost-symmetric** な半群 H は既約な半群 H の生成系を適当に取り除いて得られるという **Garcia-Sanchez** の結果を用いて、もとの既約半群の生成系が 2 か 3 の場合には上の予想が正しいことを証明した。なお、一般の半群 H に対してはタイプの上限が存在しないことが知られている。また、上述の予想に関連して、**almost-symmetric** な半群の極小生成系の上限に関する考察も行われている。

3 つ目の成果は生成系が必ずしも少なくないが特殊な生成系の場合に対する研究成果である。具体的には、 H が一般化された等差数列の場合に、いつ **almost-symmetric** になるかを特徴付けている。さらに、応用として、生成系が等差数列をなす **symmetric** な半群がいつ斉次 **Ulrich** イデアルを持つかという問題にも取り組んでいる。この問題は半群論というより可換環論の問題とみなすことができる。

以上のように、本論文は半群論、可換環論の双方において興味深いクラスである **almost-symmetric** な半群の先駆的な研究を与えており、高く評価できる。実際、本論文の予備審査以後に関係する研究成果が、**Journal of Commutative Algebra, Semigroup Forum** に **accept** された。これは本研究が可換環論、半群論双方において高く評価されていることを証明するものである。

よって本論文は、博士(理学)の学位を授与されるに値するものと認められる。

以上

平成 27 年 1 月 17 日