論文の内容の要旨

氏名：沼田崇宏

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題名：ALMOST SYMMETRIC NUMERICAL SEMIGROUPS WITH SMALL NUMBER OF GENERATORS（少ない個数で生成された概対称数値的半群について）

数値的半群とは, 次の三つの条件を満たすような自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ の部分集合 H のことである:「(1) $0 \in H$, (2) $H + H \subset H$, (3) $\#(\mathbb{N} \setminus H) < \infty$」. 例えば, 集合 $H = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12 \cdots\}$ は確かに上の三つの条件を満たしている. (3) の条件はすなわち, ある数から先の整数は全て H に含まれている, という意味である. それゆえ, H に属さない最大の整数が存在するが, これを Frobenius 数と呼び, $\mathrm{F}(H)$ という記号で表す. また, H に属さない自然数の個数を H の種数といい, $\mathrm{g}(H)$ で表す. 上の例においてはそれぞれ, $\mathrm{F}(H) = 9$, $\mathrm{g}(H) = 5$ である. ところで, 上の例において H に属する整数は全て, $4x_1 + 6x_2 + 7x_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$ の形で書くことができる. そこで, $H = \langle 4, 6, 7 \rangle$ と表す. 一般に, 全ての数値的半群 H は有限個の自然数 $a_1, ..., a_n$ を用いて, $H = \langle a_1, ..., a_n \rangle := \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}\}$ と表すことができる.

数値的半群は数学の様々な分野に関係する対象であるが, 著者は特に可換環論との関係に興味がある. 数値的半群 H が与えられたとき, その半群環が次のように多項式環の部分環として定義される: $k[H] := k[t^h \mid h \in H]$. 但し, k は体, t は不定元を表す. 数値的半群及び数値的半群環の研究は, ヨーロッパ, 特にスペイン・イタリアなどを中心に盛んに行われている. 数値的半群環は, 可換環論からの視点からは 1 次元の Coheh-Macaulay 環の特殊な例に過ぎないが, それ自体独立した研究対象である. 著者の大きな目標の一つは, 可換環論を用いて数値的半群の性質を解明することである. 半群 H の半群的性質は自然に $k[H]$ の環論的性質に対応する. この対応を詳しく観察することによって, 両者の新たな興味深い性質を発見することが可能であると思われる. 以下, この対応の例を挙げてみる.

上で述べた H の Frobenius 数は $k[H]$ の a-不変量という次数付環の不変量に対応している. また [Ku] による古典的な結果であるが, H が対称的という性質を持つことと $k[H]$ が Gorenstein 環であることとが同値である. 上で例に挙げた半群 $\langle 4, 6, 7 \rangle$ は対称的である. 図 1 のように, 整数を一直線上に並べ, H に属してる整数を $\bullet$, 属していない整数を $\circ$ として記す. このとき, 4 と 5 の間を境にして, $\circ$ と $\bullet$ が左右対称に現れる. これが対称的という名前の由来である. Gorenstein 環がそうであるように, 対称的半群も様々な良い性質を持っている.

$$
\begin{array}{ccccccccc|cccccccc}
\cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\cdots & \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ & \bullet & & \circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \cdots
\end{array}
$$

図 1:

このような理由から, 我々の研究の対象である数値的半群を可換環論, 半群論の両側面から観察することが可能となる. また, 可換環論の豊かな手法を用いることができるという利点もある.

本論文における主な研究対象は, 概対称という性質を持つ数値的半群である. 概対称半群の概念は [BF] らによって初めて定義された. それは対称, 及び擬対称半群の概念の一般化である. [BF] らは概対称半群に対応する環として概 Gorenstein 環の概念を定義し, それらの興味深い理論を展開した. また近年, [GMP] らによって, 概 Gorenstein 環の新たな定義が与えられた. それは, 一般の 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環に対して定義されるものであり, [BF] によって与えられた定義を含んでいる. [GMP] らは概 Gorenstein 環のより深い研究をした. さらにその後, [GTT] らにより, 概 Gorenstein 環を高次元化する試みもなされている. 可換環論における一般論として,「Gorenstein 環 $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay 環」という序列がある. 概 Gorenstein 環はこの間に位置するものとして, 今後新たな興味深い研究対象となることが期待される. 概対称半群は多くの概 Gorenstein 環の例を供給する. 上述したように, それは可換環論からの視点では 1 次元の Cohen-Macaulay 環の特殊な例に過ぎないが, 様々な不変量などを計算しやすいという利点がある. この利点を通じて, 概対称半群の研究は概 Gorenstein 環の研究に多くの貢献をすることができると思われる.

本論文では可換環論の視点から主として概対称半群を研究する. 特に, 半群の生成元が少ない場合について詳しくそれらを調べる. 2 元生成の半群は全て対称的であるから, 3 元生成の場合から研究を始める（第 2 章）. また, 半群の生成元が多い程, ある種の問題は難しくなる. 従って, 第 4 章では特殊な生成系を持つ半群について考察する. 以下, 本論文における各章の内容について述べる.

まず第 1 章においては, 半群及び半群環に関して, よく知られている基本事項を確認する.

第 2 章では, 3 元生成生概対称数値的半群について研究を行う. すなわち, $H = \langle a, b, c \rangle$ とする. H が対称的であるときにはその構造は良く知られている. 従って, H は非対称的と仮定する. このとき, $k[H]$ の定義イデアルは行列 $\begin{pmatrix} X^{\alpha} & Y^{\beta} & Z^{\gamma} \\ Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} & X^{\alpha'} \end{pmatrix}$ における全ての 2×2 小行列式で生成されることが [He] の結果により知られている. 但し, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' > 0$ である. この章における一つの主定理は, $\mathrm{F}(H)$ と $\mathrm{g}(H)$ の関係を, これらのパラメータを用いて表すことができる, ということである:

定理 1 (定理 2.8)**.** $H = \langle a, b, c \rangle$ を非対称な半群とする. このとき, もし $\beta' b > \alpha a$ ならば, $2 \cdot \mathrm{g}(H) - (\mathrm{F}(H) + 1) = \alpha\beta\gamma$ が成り立つ.

H が 3 元生成で非対称な半群の場合, H が概対称であることと H が擬対称であることとは同値であることに注意する. このことから, 次の 3 元生成擬対称半群の特徴付けが得られる.

系 2 (系 2.9)**.** 3 元生成半群 H が擬対称であるための必要十分条件は, $\alpha = \beta = \gamma = 1$, または $\alpha' = \beta' = \gamma' = 1$ が成り立つことである.

擬対称的半群を, このように $k[H]$ の極小自由分解（または定義イデアル）を用いて特徴付けた事は今までに無かった新しい試みであると思われる. また系 2 の応用として, 与えられた整数 f を Frobenius 数として持つ 3 元生成擬対称半群 H を全て構成する方法について述べる.

第 3 章では, 4 元生成概対称半群についての研究を行う. 特にそれらのタイプの上限に関して考察する. 一般に, 3 元生成半群のタイプの上限は 2 であり, 4 元生成以上のときにはタイプの上限は存在しないことが知られている. 著者は次のような予想を持っている.

予想 3 (予想 3.1)**.** もし $H = \langle a, b, c, d \rangle$ が概対称的であるならば, H のタイプの上限は 3 である.

この予想を検証するために, [RG5] による概対称半群の構成方法を用いる. それを詳しく述べるならば,「全ての概対称半群は, 既約半群からいくつかの生成元を除いて構成される」ということである. この結果を用いて, 本章では, 2 または 3 元生成の既約半群から 4 元生成既約半群を具体的に構成する. そのような特別な場合においては, 上記の予想は正しいことを証明する. この章の内容は [Nu1] に基づいている. また本章の最後に, 4 元生成概対称半群の定義イデアルの生成元の個数の上限についての著者の予想について述べる.

第 4 章では, 次のような特殊な生成系を持つ半群を考える: $H = \langle a, sa + d, sa + 2d, ..., sa + nd \rangle$. 但し, $s, a, d > 0$, $n \geq 2$, $\gcd(a, d) = 1$ である. このとき, H は一般化された等差数列で生成されるという. このような生成系を持つ半群は多くの著者達によって研究されている. 特に, H が対称的, 擬対称的であるための必要条件が知られている. そこでこの章では, H が概対称であるための必要十分条件を与える. 詳しく述べると以下の通りである:

定理 4 (系 4.4)**.** $H = \langle a, sa + d, sa + 2d, ..., sa + nd \rangle$ を一般化された等差数列で生成される半群とし, 非対称的であると仮定する. このとき, H が概対称的であるための必要十分条件は, $a = n + 1$ かつ $s = 1$ が成り立つことである.

第 5 章においては, Gorenstein 数値的半群環における単項式で生成された Ulrich イデアルについて研究をする. Ulrich イデアルの概念は [GOTWY] らによって定義された.

定義 5 ([GOTWY])**.** $(R, \mathfrak{m})$ を Cohen-Macaulay 局所環とし, I を R の $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする. このとき, 極小節減 $Q \subset I$ に対して, $I^2 = QI$ かつ, I/I^2 が R/I-自由加群, となるとき I は R の Ulrich イデアルであるという.

[GOTWY] らは, Gorenstein 数値的半群環における, 単項式で生成される Ulrich イデアルの特徴付けを与えた. この結果を用いて次の事を証明する.

定理 6 (定理 5.5)**.** $H = \langle a, a+d, a+2d, ..., a+nd \rangle$ を対称的とする. このとき, $k[H]$ が単項式で生成される Ulrich イデアルを持つための必要十分条件は $n = 2$ が成り立つことである.

第 4 章及び第 5 章の内容は [Nu2] に基づいている. また最後に, 半群が 3 元生成対称的のときに, 単項式で生成される Ulrich イデアルがいつ存在するかについての結果を著者の論文 [Nu3] から引用する.

第 6 章においては, 概対称半群の性質を解明するための一つのアプローチを紹介する. 半群の生成元の個数が一般の場合には, 概対称という性質はまだそれほど詳細には明らかにされていない. 著者はここで紹介する手法を一つの切り口として今後, 概対称半群の研究に貢献をしたい.