

論文の内容の要旨

氏名：江 成 隆 之

博士の専攻分野の名称：博士（理学）

論文題名：On correlation function of a Wilson loop operator and a local operator in the gauge/gravity correspondence（ゲージ／重力対応における Wilson loop 演算子と局所演算子の相関関数について）

自然界には電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用・重力相互作用の4つの相互作用が存在する。現在、重力相互作用以外の3つは標準模型とよばれるゲージ場の量子論で記述されることが分かっている。一方、重力相互作用は古典的には一般相対性理論で記述されるが、場の理論としての量子化は難しい。これに代わる理論の1つの候補が弦理論である。弦理論には重力の量子論あるいは全ての相互作用を含む統一理論の候補としての側面もあるが、数理物理的側面においても興味深い性質があることが知られている。その中でもゲージ／重力対応とよばれる、ゲージ理論と重力理論の双対性を主張する予想は盛んに研究されている分野であり、本論文もその研究の一環である。

本論文は全5章、付録3節からなり、第1章は導入である。弦理論は1次元に広がった物体、弦を基本的物体とする理論である。弦には端点をもつ開弦と端点がない閉弦の2種類がある。また弦の他に、空間 p 次元に広がった Dp -ブレーン、あるいは単に D -ブレーンとよばれる物体が存在することが分かり、これを契機に弦理論は大きく進展した。本論文で議論するゲージ/重力対応も低エネルギーでの D -ブレーン近傍の物理を二つの異なる視点から考察することで見出される。まず、 D -ブレーン上には開弦が張り付いており、その低エネルギーでの振る舞いはゲージ理論で記述される。この視点を開弦描像とよぶ。一方、 D -ブレーンの周りの時空はそのエネルギーによって曲げられ、この曲がった時空上の重力理論から D -ブレーンの性質を読み取ることができる。この2つめの視点を閉弦描像とよぶ。これら2つの視点は同じ D -ブレーンを記述しているので、互いに対応することが予想され、ゲージ／重力対応とよばれる。ここで言う対応とは、2つの描像が等しい対称性を持つことや、あるいは両者に対応する物理量が存在し、それらの値が一致することなどを指す。ゲージ／重力対応は片方の理論の強結合領域ともう片方の弱結合領域の対応になっており、強結合領域の物理の解析の新たな可能性として注目されている。

第2章では、ゲージ／重力対応の中でもよく研究されている、 AdS_5/CFT_4 対応の説明をする。この対応は IIB 型超弦理論に存在する $D3$ -ブレーン（以下 $D3$ と略す）に関する開弦、閉弦描像の対応として提案されている。開弦描像として得られるゲージ理論は4次元 $U(N)$ $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン-ミルズ理論 (SYM 理論) であり、ボソンの場としてゲージ場 A_μ と6つのスカラー場 Φ_I を含む。一方で IIB 型超弦理論の低エネルギー有効理論である IIB 型超重力理論には $D3$ -ブレーンに対応する曲がった時空が解として存在し、 $D3$ -ブレーン近傍でこの時空は $AdS_5 \times S^5$ となる。

$$ds^2 = L^2 \left[\frac{du^2 - (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{u^2} + d\Omega_5^2 \right], \quad (1)$$

$$L = (4\pi g_s N)^{1/4} \sqrt{\alpha'} \quad (g_s \cdots \text{弦の結合定数}, N \cdots D3 \text{ の枚数}, \sqrt{\alpha'} \cdots \text{弦の振動のゆらぎのスケール})$$

ここに L は曲率半径である。このため閉弦描像としては、 $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 型超重力理論を考えることとなり、上で述べた開弦描像との対応が期待される。実際に、SYM 理論のもつ共形対称性 $SO(4,2)$ と R 対称性 $SO(6)$ は $AdS_5 \times S^5$ の計量を不変に保つ等長変換に対応し、また両者は32成分の等しい超対称性を持っている。なお、(1) の (x^0, x^1, x^2, x^3) がゲージ理論の存在する方向になっている。

次に、これらの描像が有効なパラメータ領域を考える。ここまでの議論は弦理論の結合定数 g_s が小さな領域での解析に基づくため、 $g_s \ll 1$ が必要となる。そして超重力理論による記述が有効であるためには弦のゆらぎが $AdS_5 \times S^5$ の曲率半径 L に比べて十分小さい必要がある。これらの条件から

$$1 \ll 4\pi g_s N \ll N \quad (2)$$

が導かれる。これを開弦描像の条件に置き換えると、 g_s と SYM 理論の結合定数 g_{YM} の間には $4\pi g_s = g_{YM}^2$ の関係があるので、(2) は次のように書き換えられる。

$$1 \ll \lambda \ll N \quad (\lambda := g_{YM}^2 N) \quad (3)$$

ここに λ は、トーフト極限とよばれる $N \rightarrow \infty$ の極限における実質的な結合定数（トーフト結合定数）である。従って(2), (3)は第1章で述べた通りこの対応が弱結合領域と強結合領域の間の対応であることを意味している。

第3章では、ウィルソンループとよばれるゲージ理論の演算子に着目した AdS_5/CFT_4 対応の検証の研究を紹介する。前半部分では、状況証拠からウィルソンループの期待値に対する重力理論側での物理量を推測する。そして、後半部分では実際に計算を行うことで両者が一致することを検証する。ウィルソンループは量子色力学においてクォークの閉じ込めを説明するために導入された演算子で、その期待値は重いクォーク・反クォーク対の伝播に対するゲージ場の影響を表す。クォークの場合はゲージ群の基本表現に属するが、 $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM理論の場合はすべて随伴表現に属するため、そのままではクォークの役割をする場が存在しない。そこで、 $U(N+1)$ 対称性をもった理論を考え、対称性を $U(N) \times U(1)$ に破る。そうすることで、破れた対称性に対応するゲージ場やスカラー場が $U(N)$ SYM理論の基本表現となる。これらの場の伝播を考えることで次のようなウィルソンループが得られる。

$$W_C = \frac{1}{N} \text{Tr} \mathcal{P} \exp \left[\int_C (iA_\mu \dot{x}^\mu + \Phi_I \Theta_I |\dot{x}|) d\sigma \right] \quad (4)$$

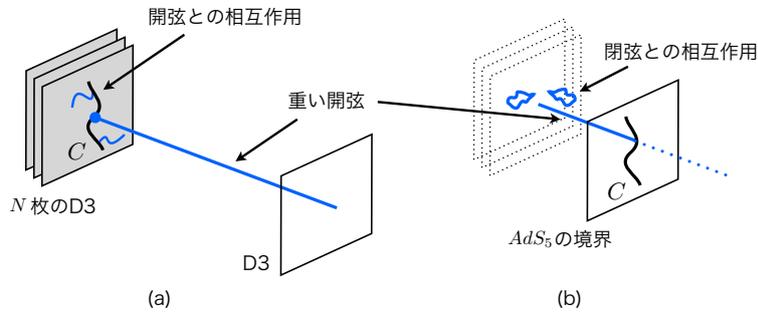


図1 重い開弦の相互作用 (a)D3 上の開弦, (b) 閉弦

この手続きを弦理論の立場からみると、次のようになる。まず $N+1$ 枚のD3から1枚を遠くに引き離す。弦の質量は長さに比例するので、これらに伸びた開弦は重く、 N 枚のD3上に端点をもつことが $U(N)$ の基本表現に対応する。よってこの重い開弦は、D3上で重いクォークの役割をする。これが曲線 C に沿って伝播するとき、 N 枚のD3上に両端をもつ開弦との相互作用(図1(a))による影響が、低エネルギーではウィルソンループ(4)の期待値 $\langle W_C \rangle$ で与えられる。これが開弦描像でのウィルソンループの扱いである。

閉弦描像では、ゲージ場との相互作用は重力場との相互作用に置き換えられる。従って、 N 枚のD3との相互作用による影響は、それらの近傍の時空である $AdS_5 \times S^5$ 上での弦の経路積分によって与えられる。

$$\int_{AdS_5 \times S^5} \mathcal{D}X e^{-S_{\text{string}}} \quad (5)$$

ただし、ウィルソンループ(4)の定義されている経路 C は、 N 枚のD3の近傍領域の境界、すなわち AdS_5 の境界上にあると解釈し、経路積分に対する境界条件を与えることになる(図1(b))。以上より、 AdS_5/CFT_4 対応におけるウィルソンループとその対応物の関係は

$$\langle W_C \rangle = \int_{AdS_5 \times S^5} \mathcal{D}X e^{-S_{\text{string}}} \sim e^{-S_{\text{string}}} \Big|_{\text{古典解}} \quad (6)$$

となる。ただし、弦のゆらぎが抑えられる極限を考えているので、右辺の経路積分は古典解で評価した。この章の残りの部分では円形ウィルソンループのについて計算を行った。ゲージ理論側ではトーフト極限と超対称性から、平面状かつ梯子状のファインマン図だけを足し上げ、重力理論側では AdS_5 の境界で弦が円形となる境界条件の下で経路積分を準古典的に評価し、両者の結果が一致することをみた。

第4章ではまずゲージ理論における円形ウィルソンループと局所演算子の相関関数の計算結果を示す。そして、これに対応する閉弦描像での物理量を計算し、結果を比較する。

円形ウィルソンループは (4) において $x^\mu(\sigma)$ と Θ_I を次のようにとる.

$$C : x^\mu(\sigma) = (r \cos \sigma, r \sin \sigma, 0, 0), \quad \Theta_I = (\sin \theta_0 \cos \sigma, \sin \theta_0 \sin \sigma, \cos \theta_0, 0, 0, 0) \quad (7)$$

一方, ここで用いる局所演算子は, スカラー場 Φ_3, Φ_4 によって

$$O_J = \text{Tr}(\Phi_3 - i\Phi_4)^J \quad (8)$$

で定義され, $x^\mu = (0, 0, 0, \ell)$ の位置にあるものとする. ここで, J は $SO(6)$ 対称性の保存量であり, 閉弦描像では S^5 の角運動量に対応する. これらの演算子は理論がもつ超対称性のうち, $1/8$ を保つことが分かっている.

トーフト極限において, 相関関数は変形ベッセル関数を用いて次式で与えられる.

$$\langle W_C O_J \rangle \sim \frac{r^J}{(r^2 + \ell^2)^J} I_J(\sqrt{\lambda'}) \quad (\lambda' = \lambda \cos^2 \theta_0) \quad (9)$$

ここでは $\lambda \rightarrow \infty$ と同時に $j' = J/\sqrt{\lambda'}$ は固定して $J \rightarrow \infty$ とする. これは対応する弦の運動が大きな角運動量をもつことを意味する. 変形ベッセル関数を鞍点法で評価することで, 次の結果が得られる.

$$\langle W_C O_J \rangle \sim \frac{r^J}{(r^2 + \ell^2)^J} \exp[\sqrt{\lambda'}(\sqrt{j'^2 + 1} + j' \ln(\sqrt{j'^2 + 1} - j'))] \quad (10)$$

次に閉弦描像での解析にうつる. まず (7) および (8) に基づいて境界条件を設定し, 弦の運動方程式を解くと次のような古典解が求まる.

$$t_E = j\tau_E - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cosh(\sqrt{j^2 + 1}\tau_E + \xi)}{\cosh(\sqrt{j^2 + 1}\tau_E - \xi)} \right), \quad \sinh \rho = \frac{\sqrt{j^2 + 1}}{\sinh \sqrt{j^2 + 1}(\tau_E + \tau_0)}, \quad (11)$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \sigma, \quad \varphi_3 = 0,$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{j^2 + 1}}{\cosh \sqrt{j^2 + 1}(\tau_E + \tau_0)}, \quad \phi = \sigma, \quad \chi_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\chi_2 = -ij\tau_E + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{\sinh(\sqrt{j^2 + 1}(\tau_E + \tau_0) + \xi) \sinh(\sqrt{j^2 + 1}\tau_0 - \xi)}{\sinh(\sqrt{j^2 + 1}(\tau_E + \tau_0) - \xi) \sinh(\sqrt{j^2 + 1}\tau_0 + \xi)} \right), \quad \chi_3 = 0 \quad (12)$$

$$(j := J/\sqrt{\lambda}, \quad \xi := \ln(j + \sqrt{j^2 + 1}))$$

ただし, $(t_E, \rho, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ は AdS_5 のグローバル座標とよばれる座標であり, $(\theta, \phi, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$ は S^5 の座標である. また, (τ_E, σ) は弦が伝播する際に掃く 2 次元面 (世界面) 上の座標であり, (11), (12) は世界面の $AdS_5 \times S^5$ への埋め込みを表している. また, この解はゲージ理論側と同じく, 理論がもつ超対称性のうち $1/8$ を保つことを調べた.

平坦な 4 次元空間上のゲージ理論と比較するために, AdS_5 ではグローバル座標から (1) で与えられるポアンカレ座標にうつる. さらに等長変換を行って解を変換することで, 図 2 のようにゲージ理論側の演算子の配置に対応する解を構成する. すなわち, $\tau_E \rightarrow 0$ において $(r \cos \sigma, r \sin \sigma, 0, 0)$, $\tau_E \rightarrow \infty$ において $(0, 0, 0, \ell)$ となるようにする. ここに現れる 4 次元座標は, AdS_5 におけるゲージ理論が存在する方向である (図 2).

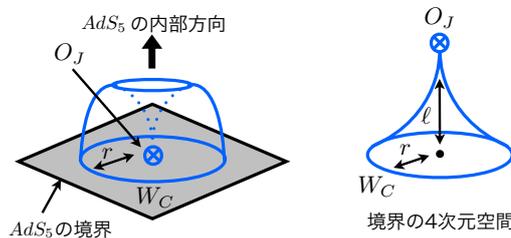


図 2 AdS_5 における弦の世界面

最後に、得られた解を用いて弦の遷移振幅を準古典的に評価する。

$$\int_{AdS_5 \times S^5} \mathcal{D}X e^{-(S_{\text{string}} + S_{\text{boundary}})} \sim e^{-(S_{\text{string}} + S_{\text{boundary}})} \Big|_{\text{古典解}} \quad (13)$$

ここに S_{boundary} は境界条件から必要な項である。結果は (10) を再現し、 AdS_5/CFT_4 対応の傍証の 1 つとなることが分かった。

さらに S^5 部分には同じ境界条件を満たす別の解が存在する。この解についても同様の評価を行うと、次の結果が得られる。

$$\frac{r^J}{(r^2 + \ell^2)^J} (-1)^J \exp[\sqrt{\lambda'}(-\sqrt{j'^2 + 1} - j' \ln(\sqrt{j'^2 + 1} - j'))] \quad (14)$$

式 (9) から式 (10) を導く際、もとの積分路からの変形として得られる最急降下線に乗る鞍点とそうでない鞍点が存在し、式 (10) は前者を拾うことで得られた結果である。一方で式 (14) は後者の鞍点を再現している。以上より、重力理論側の解析 (13), (14) から、ゲージ理論側の結果である変形ベッセル関数の 2 つの鞍点が再現されることが示された。

第 5 章はまとめと課題である。第 1 章は導入部分で、本論文の背景の説明をした。第 2 章は 4 次元 $U(N)$ $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論と $AdS_5 \times S^5$ 上の IIB 型超弦理論の間の対応、 AdS_5/CFT_4 対応について説明した。第 3 章はウィルソンループに関する対応を説明し、円形の場合について実際に検証を紹介した。第 4 章はウィルソンループと局所演算子の相関関数について計算結果を示し、対応する弦の経路積分を準古典的に評価した。結果は相関関数の振る舞いを決める変形ベッセル関数の 2 種類の鞍点を再現するものであり、 AdS_5/CFT_4 対応の傍証の 1 つとなっている。

今回の解析では、経路積分を古典解によって評価したが、弦の古典解まわりの量子ゆらぎを取り入れた解析を行うことが課題として考えられる。また、今回は特殊な演算子を考えたが、一般的なクラスの演算子を考えることでより非自明な対応を検証することが可能性として挙げられる。